Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Μαθηματικά προσανατολισμού
Γ΄ Λυκείου

Εκφωνήσεις - Λύσεις

2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

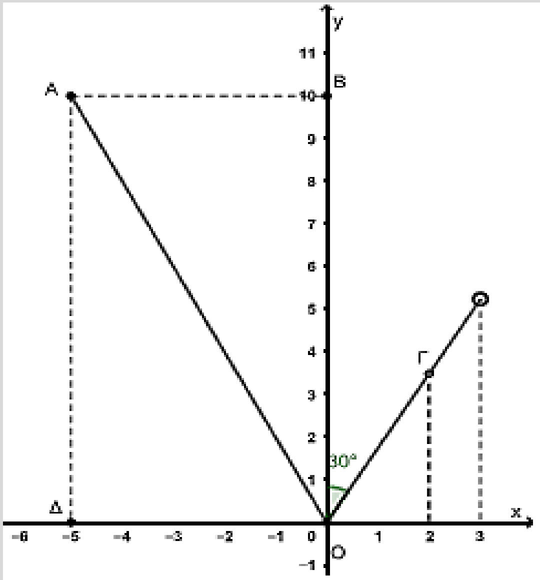
www.Askisopolis.gr

Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

Συναρτήσεις

Θέμα 2ο

26603.Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f.
γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ;



Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της f αποτελείται από τις τετμημένες των σημείων της γραφικής της παράστασης, οπότε $D_f = [-5,3)$.
Το σύνολο τιμών της f αποτελείται από τις τεταγμένες των σημείων της γραφικής της παράστασης, οπότε $f(A) = [0,10]$.

β) Το τμήμα ΟΑ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{10-0}{-5-0} = -2$ και εξίσωση $y = -2x$.

Το ΟΓ σχηματίζει γωνία 60° με τον x΄x, οπότε έχει κλίση $\lambda = εφ60^\circ = \sqrt{3}$ και εξίσωση $y = \sqrt{3}x$,

επομένως $f(x) = \begin{cases} -2x, & -5 \le x \le 0 \\ \sqrt{3}x, & 0 < x < 3 \end{cases}$.

γ) Για x = 2 είναι $f(2) = 2\sqrt{3}$, άρα $Γ\left(2, 2\sqrt{3}\right)$.

26637.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.
α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$.
β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.
γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β).

Λύση

α) Είναι $D_f = [0,+\infty)$ και $D_g = (0,+\infty)$. Είναι $D_f \cap D_g = (0,+\infty) = D_{fg}$ και $(fg)(x) = \ln x \cdot \sqrt{x}$.

β) Είναι $D_{f/g} = \{x \in D_f \cap D_g \,/\, g(x) \ne 0\} = \{x \in (0,+\infty) \,/\, \ln x \ne \ln 1\} =$

$\{x \in (0,+\infty) / x \neq 1\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

γ) Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι $(fg)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x) \Leftrightarrow \ln x \cdot \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{\ln x} \overset{x \in (0,1)\cup(1,+\infty)}{\Leftrightarrow} \ln x = \frac{1}{\ln x} \Leftrightarrow$
$\ln^2 x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \pm 1 \Leftrightarrow x = e^{\pm 1}$.

29830. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις: **i.** $f \cdot g$ **ii.** $\frac{f}{g}$

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$, άρα $D_f = [-3,3]$.

Η g ορίζεται όταν $\begin{cases} 4 - x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 4 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$, άρα $D_g = [-2,0) \cup (0,2]$.

β) i. Είναι $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [-2,0) \cup (0,2]$ και $(f \cdot g)(x) = f(x) g(x) = \sqrt{9 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$.

ii. $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g / g(x) \neq 0\}$

Είναι $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} \neq 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$, άρα $D_{\frac{f}{g}} = (-2,0) \cup (0,2)$ και $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}} = x\sqrt{\frac{9 - x^2}{4 - x^2}}$.

Θέμα 4ο

26604. Δυο εταιρείες Ε1 και Ε2 δραστηριοποιούνται στο χώρο της γεώτρησης νερού. Η πολιτική των χρεώσεων προς τους πελάτες τους είναι διαφορετική. Η εταιρεία Ε1 χρεώνει 1500 ευρώ για την εκπόνηση της αρχικής μελέτης και 200 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα μέτρα. Αν δεν βρεθεί νερό μέχρι τα 15 μέτρα, τότε αλλάζει τη χρέωση από 200 σε 250 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μετά τα 15 πρώτα. Η Ε2 χρεώνει 300 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους.
α) Αν f(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία Ε1 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε:
i. Τον τύπο της συνάρτησης f.
ii. Το ποσό που θα χρεώσει η εταιρεία Ε1 σε πελάτη που χρειάστηκε να φτάσει σε βάθος 12 μέτρων μέχρι να βρει νερό.
iii. Αν κάποιος πελάτης ξόδεψε για τη γεώτρησή του 5050 ευρώ, σε ποιο βάθος έφτασε;
β) Αν g(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία Ε2 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g.
γ) Σε ποιο βάθος σταμάτησαν τη γεώτρησή τους δυο γείτονες που συνεργάστηκαν με διαφορετική εταιρεία ο καθένας τους, βρήκαν νερό στο ίδιο βάθος και πλήρωσαν ακριβώς το ίδιο ποσό;
δ) Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x (μέτρα βάθους) συμφέρει η επιλογή της εταιρείας Ε1;

Λύση

α) i. Αν x m το βάθος τότε για $x \in (0,15]$ είναι $f(x) = 200x + 1500$, ενώ αν $x \in (15,+\infty)$ τότε αρχικά θα χρεώσει τα 15 μέτρα με κόστος $200 \cdot 15 + 1500 = 4500$ ευρώ και για τα επιπλέον $x - 15$ μέτρα το κόστος θα είναι $(x-15)\cdot 250 = 250x - 3750$, οπότε το συνολικό κόστος στη περίπτωση αυτή θα είναι

$$f(x) = 4500 + 250x - 3750 = 250x + 750, \text{ άρα } f(x) = \begin{cases} 200x + 1500, & x \in (0,15] \\ 250x + 750, & x \in (15,+\infty) \end{cases}.$$

ii. $f(12) = 200 \cdot 12 + 1500 = 3900$ ευρώ.

iii. Μέχρι τα 15 μέτρα η χρέωση της εταιρείας είναι 4500 ευρώ, οπότε το βάθος είναι μεγαλύτερο από 15 μέτρα.

Για x > 15 είναι $f(x) = 5050 \Leftrightarrow 250x + 750 = 5050 \Leftrightarrow 250x = 4300 \Leftrightarrow x = \dfrac{4300}{250} = 17,2$ μέτρα.

β) $g(x) = 300x,\ x > 0$.

γ) Αν $x \in (0,15]$ τότε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 200x + 1500 = 300x \Leftrightarrow 100x = 1500 \Leftrightarrow x = 15$ μέτρα, δεκτό.
Αν x > 15 τότε
$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 250x + 750 = 300x \Leftrightarrow 50x = 750 \Leftrightarrow x = 15$ απορρίπτεται.

δ) Συμφέρει η επιλογή της εταιρείας Ε1, όταν $f(x) < g(x)$.

Αν $x \in (0,15]$ τότε $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 200x + 1500 < 300x \Leftrightarrow 100x > 1500 \Leftrightarrow x > 15$ απορρίπτεται

Αν x > 15 τότε $f(x) < g(x) \Leftrightarrow 250x + 750 < 300x \Leftrightarrow 50x > 750 \Leftrightarrow x > 15$.

Επομένως συμφέρει η Ε1 όταν τα μέτρα βάθους είναι περισσότερα από 15.

Σύνθεση Συναρτήσεων

Θέμα 2ο

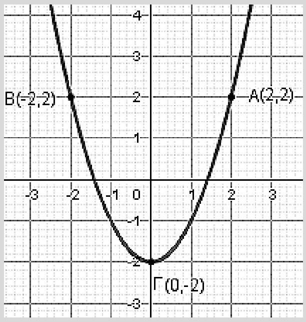
28304. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2,2)$, $B(-2,2)$ και $\Gamma(0,-2)$.

Έστω επίσης η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=|x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$.

β) Να βρείτε τις τιμές $(gof)(2)$, $(gof)(-2)$ και $(gof)(0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης gof.



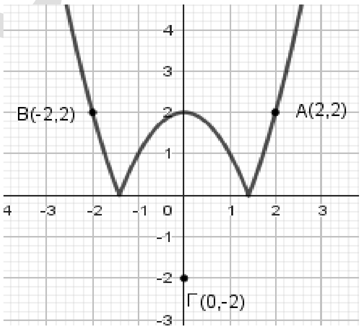
Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α, Β, Γ ισχύει ότι $f(2)=2$, $f(-2)=2$ και $f(0)=-2$.

β) $(gof)(2)=g(f(2))=g(2)=|2|=2$, $(gof)(-2)=g(f(-2))=g(2)=|2|=2$, $(gof)(0)=g(f(0))=g(-2)=|-2|=2$.

γ) Είναι $D_{g\circ f}=\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$ και $(gof)(x)=g(f(x))=|f(x)|$.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά των σημείων της που βρίσκονται κάτω από τον x΄x ως προς αυτόν και φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



29831. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα (-1, 1).

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g$.

γ) Δίνεται ότι η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $x\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f\circ g)(x)$.

Λύση

α) Η g ορίζεται όταν $\dfrac{1-x}{1+x}>0\Leftrightarrow(1-x)(1+x)>0\Leftrightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow x^2<1\Leftrightarrow|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$, άρα $D_g=(-1,1)$.

β) $D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\left\{x\in(-1,1)\,/\,\ln\dfrac{1-x}{1+x}\neq 0\right\}\Leftrightarrow$

$D_{f\circ g}=\left\{x\in(-1,1)\,/\,\ln\dfrac{1-x}{1+x}\neq\ln 1\right\}=\left\{x\in(-1,1)\,/\,\dfrac{1-x}{1+x}\neq 1\right\}\Leftrightarrow$

$D_{f\circ g}=\{x\in(-1,1)\,/\,1-x\neq 1+x\}=\{x\in(-1,1)\,/\,2x\neq 0\}\Leftrightarrow D_{f\circ g}=\{x\in(-1,1)\,/\,x\neq 0\}=(-1,0)\cup(0,1)$

γ) Για κάθε $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ είναι

$$f(g(x))=\frac{e^{g(x)}+1}{e^{g(x)}-1}=\frac{\frac{1-x}{1+x}+1}{\frac{1-x}{1+x}-1}=\frac{\frac{1-x+1+x}{1+x}}{\frac{1-x-1-x}{1+x}}=\frac{\frac{2}{1+x}}{\frac{-2x}{1+x}}=\frac{2}{-2x}=-\frac{1}{x}\ .$$

29832. Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ και $g(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}^*$ και της g το διάστημα (-1, 1).

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f\circ g)(x)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $e^x-1\neq 0\Leftrightarrow e^x\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0$, άρα $D_f=\mathbb{R}^*$.

Η g ορίζεται όταν $\dfrac{1-x}{1+x}>0\Leftrightarrow(1-x)(1+x)>0\Leftrightarrow -1<x<1$, άρα $D_g=(-1,1)$.

β) $D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g\ /\ g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in(-1,1)\ /\ \ln\dfrac{1-x}{1+x}\neq 0\right\}=(-1,0)\cup(0,1)$ γιατί

$$\ln\frac{1-x}{1+x}\neq 0\Leftrightarrow\frac{1-x}{1+x}\neq 1\Leftrightarrow 1-x\neq 1+x\Leftrightarrow 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0\ .$$

γ) Είναι $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^{\ln\frac{1-x}{1+x}}+1}{e^{\ln\frac{1-x}{1+x}}-1}=\dfrac{\frac{1-x}{1+x}+1}{\frac{1-x}{1+x}-1}=\dfrac{\frac{1-x+1+x}{\cancel{1+x}}}{\frac{1-x-1-x}{\cancel{x}}}=\dfrac{2}{-2x}=-\dfrac{1}{x}$.

35168. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h ώστε :

$$f(x)=\ln(1+e^x),\qquad g(x)=2\ln x\quad\text{και}\quad h(x)=\ln(1+x^2).$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f\circ g$ και h είναι ίσες.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $1+e^x>0\Leftrightarrow e^x>-1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $D_f=\mathbb{R}$. Η g ορίζεται όταν $x>0$ οπότε $D_g=(0,+\infty)$.

β) $D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g\ /\ g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in(0,+\infty)\ /\ \ln(1+x^2)\in\mathbb{R}\right\}=(0,+\infty)$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\left(1+e^{2\ln x}\right)=\ln\left(1+e^{\ln x^2}\right)=\ln(1+x^2)$.

γ) Η h ορίζεται όταν $1+x^2>0\Leftrightarrow x^2>-1$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $D_h=\mathbb{R}$.

Επειδή $D_{f\circ g}\neq D_h$ οι συναρτήσεις $f\circ g$ και h δεν είναι ίσες.

Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης

Θέμα 2ο

23216.Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον x΄x.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$.

Λύση

α) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε είναι $0 < 3$ και $f(0) = 8 > 0 = f(3)$ άτοπο. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x όταν:

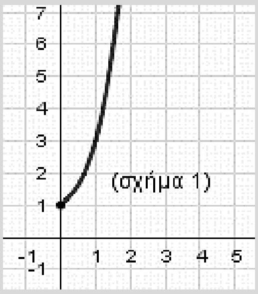
$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(3) \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} x < 3$.

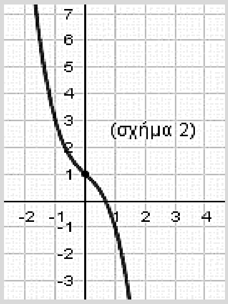
γ) Για κάθε $x > 0$ είναι $f(\ln x) > 0 \Leftrightarrow f(\ln x) > f(3) \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} \ln x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < e^3$

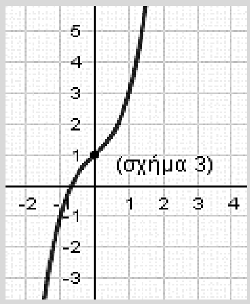
23642.Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.







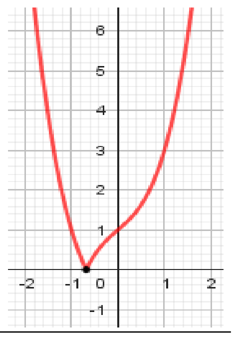
γ) i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$.

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι: $x_1^3 < x_2^3$ (1) και $x_1 + 1 < x_2 + 1$ (2). Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) έχουμε:

$x_1^3 + x_1 + 1 < x_2^3 + x_2 + 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.



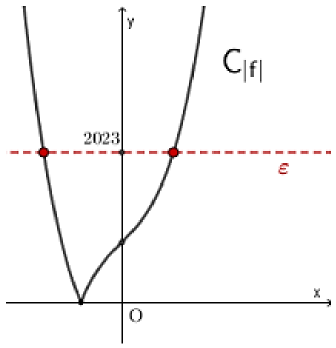
β) Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ δεν μπορεί να παριστάνεται στο σχήμα 1. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, δεν μπορεί να παριστάνεται στο σχήμα 2, άρα η C_f είναι στο σχήμα 3.

γ) i.Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον x΄x ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά των σημείων της που βρίσκονται κάτω από τον x΄x, ως προς αυτόν.

ii. $\left|x^3+x+1\right|=2023 \Leftrightarrow \left|f(x)\right|=2023$.

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης είναι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της $|f|$ με την ευθεία y = 2023.

Κατασκευάζοντας την ευθεία y = 2023 στο ίδιο σχήμα με την $|f|$ βλέπουμε ότι έχουν δύο κοινά σημεία, επομένως η εξίσωση $\left|f(x)\right|=2023$ έχει ακριβώς δύο λύσεις.



26602. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x)=x-2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

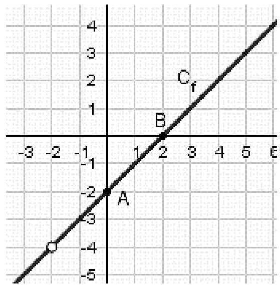
β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h, με $h(x)=\left|g(x)\right|$.

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$, άρα $D_f=\mathbb{R}-\{-2\}$. Επειδή $D_g=\mathbb{R}\neq D_f$ οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες.

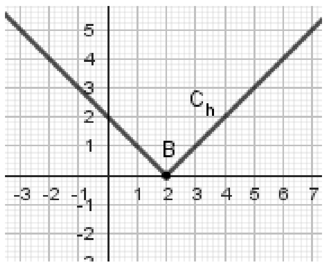
β) Για $x\neq -2$ είναι $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}=\dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}}=x-2=g(x)$.



Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της ευθείας $y=x-2$ εκτός του σημείου $(-2,-4)$.

Για x = 0 είναι $y=-2$ και για y = 0 είναι $0=x-2 \Leftrightarrow x=2$, άρα η C_f τέμνει τους άξονες στα σημεία Α(0, - 2) και Β(2,0).

Η γραφική παράσταση της h αποτελείται από τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά ως προς τον x΄x, των σημείων της που βρίσκονται κάτω από αυτόν.



γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2)$ και $(-2,+\infty)$. Η h είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2)$, $(-2,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

Η f δεν έχει ακρότατα, ενώ η h έχει ελάχιστο το 0 για x = 2.

28300. Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

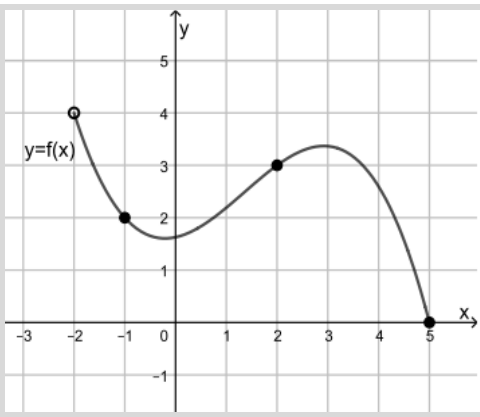
Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f,

β) τις τιμές $f(-1), f(2)$ και $f(5)$,

γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f, εφόσον υπάρχουν,

δ) την τιμή της σύνθεσης fof στο -1.



Λύση

α) Το πεδίο ορισμού αποτελείται από τις τετμημένες των σημείων της C_f, οπότε $D_f = (-2,5]$.

β) $f(-1) = 2,\ f(2) = 3$ και $f(5) = 0$.

γ) Η f έχει ολικό ελάχιστο το 0 για x = 5 και δεν έχει ολικό μέγιστο.

δ) $(fof)(-1) = f(f(-1)) = f(2) = 3$

35170. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε: $f(x) = \ln(1+e^x)$ και $g(x) = 2\ln x$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.
β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f + g.
γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f + g ως προς τη μονοτονία.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $1+e^x > 0 \Leftrightarrow e^x > -1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε $D_f = \mathbb{R}$. Η g ορίζεται όταν $x > 0$ οπότε $D_g = (0,+\infty)$.

β) Είναι $D_{f+g} = D_g \cap D_f = (0,+\infty)$ και $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \ln(1+e^x) + 2\ln x$.

γ) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 1+e^{x_1} < 1+e^{x_2} \Leftrightarrow \ln(1+e^{x_1}) < \ln(1+e^{x_2})$ (1)
και $\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2$ (2).
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει $\ln(1+e^{x_1}) + 2\ln x_1 < \ln(1+e^{x_2}) + 2\ln x_2 \Leftrightarrow$
$(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2) \Leftrightarrow (f+g) \nearrow (0,+\infty)$.

Αντίστροφη συνάρτηση

Θέμα 2ο

23196. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε την f^{-1}.

Έστω $f^{-1}(x)=\ln(x+1),\ x>-1$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,\ f^{-1}$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}-1<e^{x_2}-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow f$ 1−1, άρα η f αντιστρέφεται.

β) Θέτουμε $f(x)=y,\ y\in\mathbb{R}$ και έχουμε: $e^x-1=y\Leftrightarrow e^x=y+1\ (1)$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x>0\Leftrightarrow y+1>0\Leftrightarrow y>-1$.

Τότε η (1) γίνεται: $x=\ln(y+1)$, άρα $f^{-1}(y)=\ln(y+1),\ y>-1$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln(x+1),\ x>-1$.

γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=e^x$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=\ln x$ κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά.

23198. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-1,\ x\geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε την f^{-1}.

Έστω $f^{-1}(x)=(x+1)^2,\ x\geq -1$

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $f,\ f^{-1}$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in[0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι

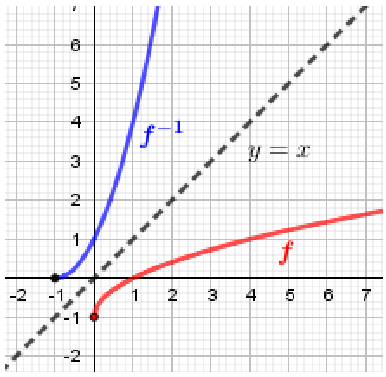
$\sqrt{x_1}<\sqrt{x_2}\Leftrightarrow\sqrt{x_1}-1<\sqrt{x_2}-1\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f\nearrow[0,+\infty)\Rightarrow f$ 1−1, άρα η f αντιστρέφεται.

β) Για κάθε $x\geq 0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x}-1=y\Leftrightarrow\sqrt{x}=y+1\ (1)$.

Είναι $\sqrt{x}\geq 0\Leftrightarrow y+1\geq 0\Leftrightarrow y\geq -1$, τότε η (1) γίνεται: $x=(y+1)^2\geq 0$,

άρα $f^{-1}(y)=(y+1)^2,\ y\geq -1$

οπότε $f^{-1}(x)=(x+1)^2,\ x\geq -1$.



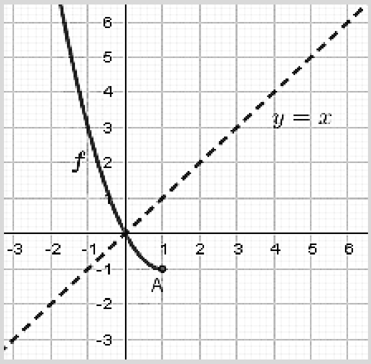
γ) Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της $y=\sqrt{x}$ κατά 1 μονάδα προς τα κάτω. Η γραφική παράσταση της f^{-1} προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 1 μονάδα αριστερά.

23209. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2-1,\ \ x\le 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.

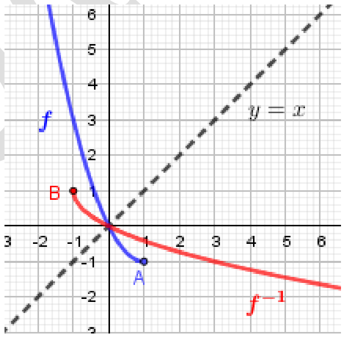


Λύση

α) Για κάθε $x_1<x_2\le 1$ είναι $x_1-1<x_2-1\le 0\Rightarrow (x_1-1)^2>(x_2-1)^2\Leftrightarrow (x_1-1)^2-1>(x_2-1)^2-1\Leftrightarrow$ $f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(-\infty,1]$.

β) Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα σημεία της παραβολής $y=(x-1)^2-1$ με $x\le 1$. Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο Κ(1, - 1) στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστο, αφού $y=(x-1)^2-1=x^2-2x+1-1=x^2-2x$, άρα η f έχει σύνολο τιμών το $[-1,+\infty)$.

γ) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία y = x.



24569. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f=[0,1]$.

β) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1 – 1”.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x))=0,\ x\in[0,1]$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $1-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 1$ και $1-\sqrt{1-x}\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\le 1\Leftrightarrow 1-x\le 1\Leftrightarrow x\ge 0$, άρα $D_f=[0,1]$.

β) i. Για κάθε $x_1,x_2\in[0,1]$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $\sqrt{1-\sqrt{1-x_1}}=\sqrt{1-\sqrt{1-x_2}}\Leftrightarrow$ $1-\sqrt{1-x_1}=1-\sqrt{1-x_2}\Leftrightarrow \sqrt{1-x_1}=\sqrt{1-x_2}\Leftrightarrow 1-x_1=1-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2\Rightarrow f\ 1-1$.

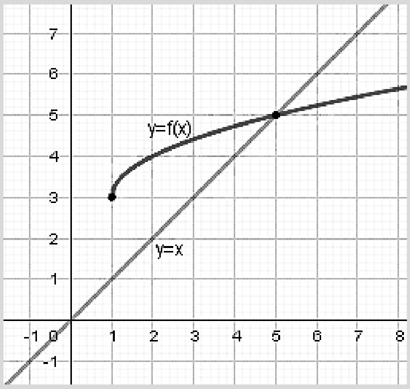
ii. $f(f(x))=0\Leftrightarrow f(f(x))=f(0)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(0)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=0$

24130.Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\sqrt{x-1}+3$, $x\geq 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y=x$ της γωνίας xOy. Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1}.



Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in[1,+\infty)$ με $x_1<x_2$, είναι $x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow\sqrt{x_1-1}<\sqrt{x_2-1}\Leftrightarrow$ $\sqrt{x_1-1}+3<\sqrt{x_2-1}+3\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, άρα είναι και 1-1.

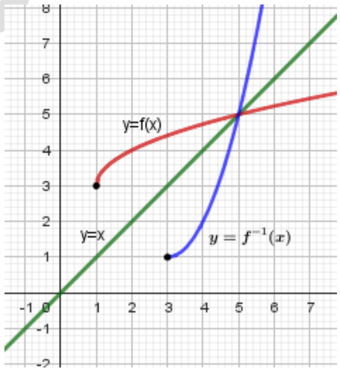
β) Για κάθε $x\geq 1$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x-1}+3=y\Leftrightarrow\sqrt{x-1}=y-3$ (1).

Είναι $y-3\geq 0\Leftrightarrow y\geq 3$, τότε η (1) γίνεται:

$x-1=(y-3)^2\Leftrightarrow x=(y-3)^2+1$

Είναι $x\geq 1\Leftrightarrow(y-3)^2+1\geq 1\Leftrightarrow(y-3)^2\geq 0$ ισχύει. Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=[3,+\infty)$.

Είναι $f^{-1}(y)=(y-3)^2+1,\ y\geq 3$ άρα $f^{-1}(x)=(x-3)^2+1,\ x\geq 3$.



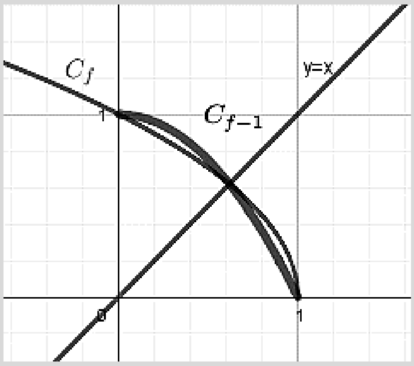
γ) Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η συμμετρική της f ως προς την ευθεία y= x. Στο σχήμα βλέπουμε ότι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1} είναι το (5,5).

24703.Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{1-x}$ και $x\in(-\infty,1]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1}. Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.



Λύση

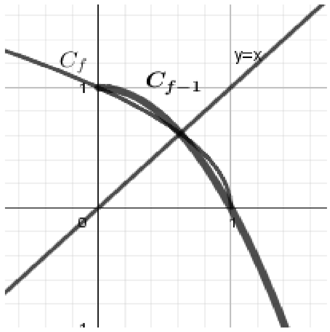
α) Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,1]$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι $\sqrt{1-x_1}=\sqrt{1-x_2}\Leftrightarrow 1-x_1=1-x_2\Leftrightarrow$ $-x_1=-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}.

β) Για κάθε $x\in(-\infty,1]$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=y$.

Για $y\geq 0$ είναι $1-x=y^2\Leftrightarrow 1-y^2=x$.

Είναι $x\leq 1\Leftrightarrow 1-y^2\leq 1\Leftrightarrow y^2\geq 0$ ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}(y)=1-y^2,\ y\ge 0$, οπότε $f^{-1}(x)=1-x^2,\ x\ge 0$.



γ) Επειδή οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x, προκύπτει το διπλανό σχήμα.

24991.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=-2\ln x+1,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=1-\ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f=g$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $f(x_1)=f(x_2)$ είναι
$-2\ln x_1+1=-2\ln x_2+1\Leftrightarrow -2\ln x_1=-2\ln x_2\Leftrightarrow \ln x_1=\ln x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

β) Για κάθε x > 0 είναι $f(x)=y\Leftrightarrow -2\ln x+1=y\Leftrightarrow -2\ln x=y-1\Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1-y}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{1-y}{2}}$.

Άρα $f^{-1}(y)=e^{\frac{1-y}{2}},\ y\in\mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(x)=e^{\frac{1-x}{2}},\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x^2>0\Leftrightarrow x\ne 0$ άρα $A_g=\mathbb{R}^*$.

Επειδή $A_f\ne A_g$ οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες.

όταν όμως $x\in(0,+\infty)$ τότε $g(x)=1-\ln x^2=1-2\ln x=f(x)$.

25124.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=-x^3,\ \ x\in(-\infty,0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}.

Λύση

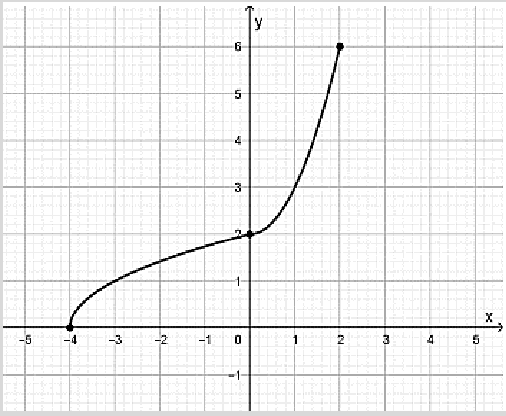
α) Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,0]$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow -x_1^3>-x_2^3\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(-\infty,0]$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Για κάθε $x\le 0$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow -x^3=y\Leftrightarrow x^3=-y$ (1).

Είναι $x\le 0\Leftrightarrow x^3\le 0\Leftrightarrow -y\le 0\Leftrightarrow y\ge 0$, άρα $f(A)=[0,+\infty)=D_{f^{-1}}$.

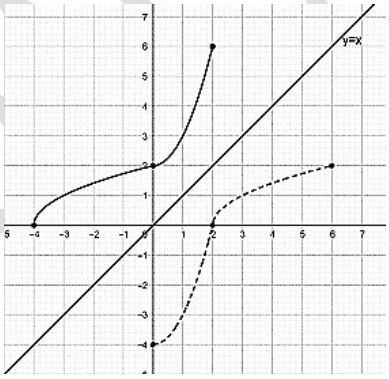
γ) Η (1) γίνεται $x=-\sqrt[3]{y}$, άρα $f^{-1}(y)=-\sqrt[3]{y},\ y\ge 0$, οπότε $f^{-1}(x)=-\sqrt[3]{x},\ x\ge 0$.

27277. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f.
Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$.
γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f.



Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $[-4,2]$ και σύνολο τιμών το $[0,6]$.
Όμως $D_{f^{-1}} = f(A)$, οπότε η f έχει σύνολο τιμών το $[-4,2]$ και $f^{-1}(A) = D_f$, άρα $D_f = [0,6]$.



β) Έστω $f(2) = \alpha$ τότε $f^{-1}(\alpha) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha) = f^{-1}(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \alpha = 0$, δηλαδή $f(2) = 0$ και $f^{-1}(f(6)) = 6$.

γ) Σχεδιάζουμε τη συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία y = x.

27317. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [0,2]$
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο [0,2].
β) Να αποδείξετε ότι:
i. Το σύνολο τιμών της f είναι το [0, 2].
ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .
iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,2]$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow -x_1^2 > -x_2^2 \Leftrightarrow 4 - x_1^2 > 4 - x_2^2 \Leftrightarrow$
$\sqrt{4-x_1^2} > \sqrt{4-x_2^2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 2].

β) i. Για κάθε $x \in [0,2]$ και $y \ge 0$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = y \Leftrightarrow 4 - x^2 = y^2 \Leftrightarrow 4 - y^2 = x^2$.
Για κάθε $x \in [0,2]$, είναι $0 \le x^2 \le 4 \Leftrightarrow 0 \le 4 - y^2 \le 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 4-y^2 \ge 0 \\ 4-y^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \le 4 \\ y^2 \ge 0 \text{ ισχύει} \end{cases} \overset{y \ge 0}{\Leftrightarrow} 0 \le y \le 2$,
άρα $f(A) = [0,2]$.

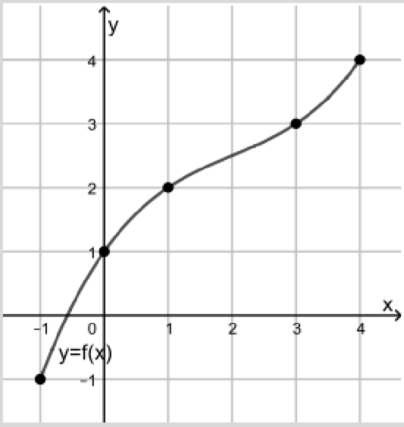
ii. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται, οπότε ορίζεται η f^{-1}.
Για κάθε $x, y \in [0,2]$ είναι $x^2 = 4 - y^2 \overset{x \in [0,2]}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{4-y^2}$, άρα $f^{-1}(y) = \sqrt{4-y^2}$, $y \in [0,2]$, οπότε
$f^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2} = f(x)$, $x \in [0,2]$.

28299.Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A=[-1,4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη C_f :

α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f,

β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=x$,

γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

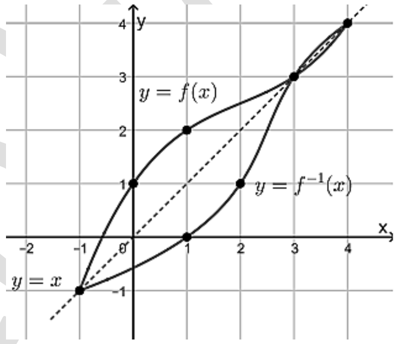


Λύση

α) Επειδή κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f το πολύ μία φορά, η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

β) Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων την ευθεία y=x και βλέπουμε ότι τα κοινά τους σημεία είναι τα (-1,-1), (3, 3) και (4, 4).

γ) Σχεδιάζουμε τη συμμετρική της C_f ως προς την ευθεία y = x.



29835.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να αποδείξετε ότι για $x\in(-\infty,3]$ η $(f\circ g)(x)=\sqrt{3-x}-1$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=(f\circ g)(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφό της.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $x+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$ άρα $D_f=[-1,+\infty)$. Η g ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $D_g=\mathbb{R}$.

β) $D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2-x\ge -1\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\le 3\}=(-\infty,3]$ και

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{2-x+1}-1=\sqrt{3-x}-1$

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in(-\infty,3]$ με $x_1<x_2$ είναι $-x_1>-x_2\ge -3\Leftrightarrow 3-x_1>3-x_2\ge 0\Rightarrow$
$\sqrt{3-x_1}>\sqrt{3-x_2}\Leftrightarrow\sqrt{3-x_1}-1>\sqrt{3-x_2}-1\Leftrightarrow\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$ άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε είναι 1-1.

Θέτουμε $\varphi(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{3-x}-1=y\Leftrightarrow\sqrt{3-x}=y+1$.

Για κάθε $x\le 3$ είναι $\sqrt{3-x}\ge 0\Leftrightarrow y+1\ge 0\Leftrightarrow y\ge -1$ και $3-x=(y+1)^2\Leftrightarrow 3-(y+1)^2=x$, άρα $f^{-1}(y)=3-(y+1)^2$, $y\ge -1$, οπότε $f^{-1}(x)=3-(x+1)^2$, $x\ge -1$.

29926. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=\ln(x-2)+5$ για κάθε $x>2$ και $g(x)=2x-1$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1}.

β) i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g^{-1}$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f\circ g^{-1}$.

Λύση

α) i. Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ είναι $2x_1\neq 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1-1\neq 2x_2-1 \Leftrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, οπότε η g είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

ii. Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=y\Leftrightarrow 2x-1=y\Leftrightarrow 2x=y+1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(y+1)$, άρα

$g^{-1}(y)=\frac{1}{2}(y+1),\ y\in\mathbb{R}$, οπότε $g^{-1}(x)=\frac{1}{2}(x+1),\ x\in\mathbb{R}$.

β) i. Η f ορίζεται όταν $x-2>0\Leftrightarrow x>2$, άρα $D_f=(2,+\infty)$.

$$D_{f\circ g^{-1}}=\left\{x\in\ g^{-1}\ /\ g^{-1}(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ \frac{1}{2}(x+1)>2\right\}=(3,+\infty)$$

$\frac{1}{2}(x+1)>2\Leftrightarrow x+1>4\Leftrightarrow x>3$.

ii. $(f\circ g^{-1})(x)=f\left(g^{-1}(x)\right)=\ln\left(\frac{1}{2}(x+1)-2\right)+5=\ln\frac{x-3}{2}+5$

31528. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1-e^{-x}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε την f^{-1}.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $1-e^{-x}>0\Leftrightarrow e^{-x}<1\Leftrightarrow -x<0\Leftrightarrow x>0$, άρα $D_f=(0,+\infty)$.

β) Για κάθε x > 0 είναι $f(x)=y\Leftrightarrow \ln\left(1-e^{-x}\right)=y\Leftrightarrow 1-e^{-x}=e^{y}\Leftrightarrow 1-e^{y}=e^{-x}$ (1)

Πρέπει $1-e^{y}>0\Leftrightarrow e^{y}<1\Leftrightarrow y<0$, τότε η (1) γίνεται: $-x=\ln\left(1-e^{y}\right)\Leftrightarrow x=-\ln\left(1-e^{y}\right)$.

Είναι $x>0\Leftrightarrow -\ln\left(1-e^{y}\right)>0\Leftrightarrow \ln\left(1-e^{y}\right)<0\Leftrightarrow 1-e^{y}<1\Leftrightarrow e^{y}>0$ ισχύει.

Άρα $f^{-1}(y)=-\ln\left(1-e^{y}\right),\ y<0$, οπότε $f^{-1}(x)=-\ln\left(1-e^{x}\right),\ x<0$.

32695. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$, σύνολο τιμών το $\left[-\frac{1}{2},1\right)$ και τύπο $f(x)=1-\frac{3}{\sqrt{x}+2}$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\left[-\frac{1}{2},1\right)$, σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$ και τύπο $g(x)=\left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2$. Με δεδομένο ότι η συνάρτηση f είναι 1-1,

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)<0$ και $g(x)>0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία.

Λύση

α) Για κάθε $x \in [0,+\infty)$, $y \in \left[-\frac{1}{2},1\right)$, είναι $f(x) = y \Leftrightarrow 1-\frac{3}{\sqrt{x}+2} = y \Leftrightarrow 1-y = \frac{3}{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{x}+2 = \frac{3}{1-y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{1-y} - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3-2+2y}{1-y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1+2y}{1-y} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1+2y}{1-y}\right)^2$, άρα

$f^{-1}(y) = \left(\frac{1+2y}{1-y}\right)^2$, $y \in \left[-\frac{1}{2},1\right)$, οπότε $f^{-1}(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2$, $x \in \left[-\frac{1}{2},1\right)$. Επομένως $f^{-1} = g$.

β) $0 \le x < 1 \Leftrightarrow 0 \le \sqrt{x} < 1 \Leftrightarrow 2 \le \sqrt{x}+2 < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ge \frac{1}{\sqrt{x}+2} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$1 < \frac{3}{\sqrt{x}+2} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow -1 > -\frac{3}{\sqrt{x}+2} \ge -\frac{3}{2} \Leftrightarrow 1-1 > 1-\frac{3}{\sqrt{x}+2} \ge 1-\frac{3}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le f(x) < 0$.

Για κάθε $x \in [0,1)$ είναι $g(x) > 0$.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη για $x \in D_f \cap D_g = [0,1)$.

Επειδή για κάθε $x \in [0,1)$ είναι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$, η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη .

35171. Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε : $g(x) = 2\ln x$, $x > 0$ και $h(x) = \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.

ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$.

Λύση

α) i. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι

$\ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g \nearrow (0,+\infty)$ άρα η αι 1-1 και αντιστρέφεται.

ii. Για κάθε $x \in (0,+\infty)$ και $y \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) = y \Leftrightarrow 2\ln x = y \Leftrightarrow \ln x^2 = y \Leftrightarrow x^2 = e^y \Leftrightarrow |x| = \sqrt{e^y} \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$x = e^{\frac{y}{2}}$, άρα $g^{-1}(y) = e^{\frac{y}{2}}$, $y \in \mathbb{R}$, οπότε $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$ με $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $D_{h\circ g^{-1}} = \left\{x \in D_{g^{-1}} \,/\, g^{-1}(x) \in D_h\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, e^{\frac{x}{2}} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$ και

$(h \circ g^{-1})(x) = h(g^{-1}(x)) = \ln\left(1+\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2\right) = \ln(1+e^x)$

Θέμα 4ο

23200. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1,\ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της.

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha\ln\alpha)\le f(\ln\alpha)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1}+\ln x\right)=\ln 2$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+(3-\ln 2)x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται.

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1,\ln 2)$ είναι $f(0)=3$ και $f(1)=\ln 2$.

Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και $0<1$ με $f(0)>f(1)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(\alpha\ln\alpha)\le f(\ln\alpha)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}\alpha\ln\alpha\ge\ln\alpha\Leftrightarrow\alpha\ln\alpha-\ln\alpha\ge 0\Leftrightarrow(\alpha-1)\ln\alpha\ge 0$

Αν $0<\alpha<1$ τότε $\alpha-1<0,\ \ln\alpha<0$, οπότε $(\alpha-1)\ln\alpha>0$.

Αν $\alpha\ge 1$ τότε $\alpha-1\ge 0,\ \ln\alpha\ge 0$, οπότε $(\alpha-1)\ln\alpha\ge 0$, οπότε για κάθε $\alpha>0$ είναι $(\alpha-1)\ln\alpha\ge 0$.

γ) $f\left(e^{x-1}+\ln x\right)=\ln 2\Leftrightarrow f\left(e^{x-1}+\ln x\right)=f(1)\overset{f\searrow\Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow}e^{x-1}+\ln x=1\quad(1)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{x-1}+\ln x,\ x>0$.

Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1-1<x_2-1\Leftrightarrow e^{x_1-1}<e^{x_2-1}$ και $\ln x_1<\ln x_2$, οπότε και $e^{x_1-1}+\ln x_1<e^{x_2-1}+\ln x_2\Leftrightarrow h(x_1)<h(x_2)\Leftrightarrow h\nearrow(0,+\infty)\Rightarrow h\ 1-1$.

Η (1) γίνεται: $h(x)=h(1)\overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=1$.

δ) Είναι $g(0)=f(0)+(3-\ln 2)\cdot 0-3=3-3=0$ και $g(1)=f(1)+3-\ln 2-3=\ln 2-\ln 2=0$.

Επειδή $g(0)=g(1)$ η g δεν είναι 1-1, οπότε δεν αντιστρέφεται.

Όριο συνάρτησης στο x_0

Θέμα 2ο

24768. Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x)=x^2-x+1$ και $g(x)=\sqrt{4x-3}$.

α) Να αποδείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq\frac{3}{4}$.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h=g\circ f$.

γ) Αν $h(x)=|2x-1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to0}\frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow x^2-x+1\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4x^2-4x+4\geq3\Leftrightarrow 4x^2-4x+1\geq0\Leftrightarrow$

$(2x-1)^2\geq0$ ισχύει.

β) Η g ορίζεται όταν $4x-3\geq0\Leftrightarrow 4x\geq3\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{4}$, άρα $A_g=\left[\frac{3}{4},+\infty\right)$.

Είναι $A_h=\left\{x\in A_f\,/\,f(x)\in A_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,f(x)\geq\frac{3}{4}\right\}=\mathbb{R}$ και

$h(x)=g(f(x))=\sqrt{4(x^2-x+1)-3}=\sqrt{4x^2-4x+4-3}=\sqrt{4x^2-4x+1}\Leftrightarrow h(x)=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|$

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to0}(2x-1)=-1$ άρα $2x-1<0$ για τιμές του x πολύ κοντά στο μηδέν, άρα

$$\lim_{x\to0}\frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{-2x+1-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{-2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{-2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-2x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=\lim_{x\to0}\frac{-2\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\cancel{x}}=-4$$

28477. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=e^{3x+2}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

β) Να βρείτε την συνάρτηση gof.

γ) Αν $g(f(x))=6x+4$, $x\in\mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to0}\frac{(gof)(x)-\eta\mu^2x-4}{x}$.

Λύση

α) Η g ορίζεται όταν $x^2>0\neq x\neq0$, άρα $D_g=\mathbb{R}^*$.

β) Είναι $D_{gof}=\left\{x\in D_f\,/\,f(x)\in D_g\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^{3x+2}\neq0\right\}=\mathbb{R}$ και

$(gof)(x)=g(f(x))=\ln\left(e^{3x+2}\right)^2=\ln e^{6x+4}=6x+4,\ x\in\mathbb{R}$

γ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(gof)(x)-\eta\mu^2x-4}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{6x+\cancel{4}-\eta\mu^2x-\cancel{4}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(6+\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=6$.

Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

Θέμα 2ο

23217. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-1)$ και $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$

ii. $\lim_{x\to 1} g(x)$

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f\cdot g$

ii. το $\lim_{x\to 1}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$.

Λύση

α) i. $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\ln(x-1)\underset{x\to 1^+\Rightarrow u\to 0^+}{\overset{x-1=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$

ii. $\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}\underset{x\to 1^-\Rightarrow u\to 0^-}{\overset{x-1=u}{=}}\lim_{u\to 0^-}\frac{1}{u}=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\underset{x\to 1^+\Rightarrow u\to 0^+}{\overset{x-1=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}=+\infty$.

Επειδή $\lim_{x\to 1^-} g(x)\neq\lim_{x\to 1^+} g(x)$ δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 1} g(x)$.

β) i. $A_{f\cdot g}=A_f\cap A_g=(1,+\infty)\cap\mathbb{R}-\{1\}=(1,+\infty)$

ii. $\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to 1}\left[\ln(x-1)\frac{1}{x-1}\right]=-\infty\cdot(+\infty)=-\infty$

Όριο στο άπειρο

Θέμα 2ο

23641. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2\right)<f\left(x\right)$.

β) Αν $\alpha^2<\alpha$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left[f\left(\alpha^2-\alpha\right)-f\left(0\right)\right]x\right)=-\infty$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^x-1\right)=f\left(0\right)$.

Λύση

α) $f\left(x^2\right)<f\left(x\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}x^2<x\Leftrightarrow x^2-x<0\Leftrightarrow x\left(x-1\right)<0\Leftrightarrow 0<x<1$

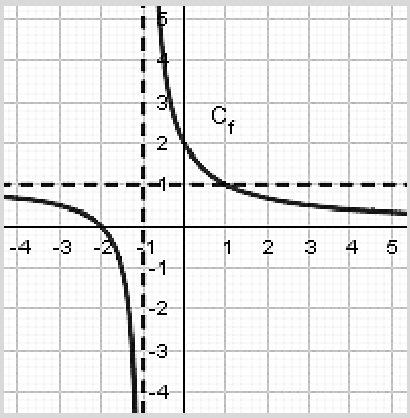
β) Είναι $\alpha^2<\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-\alpha<0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f\left(\alpha^2-\alpha\right)<f\left(0\right)\Leftrightarrow f\left(\alpha^2-\alpha\right)-f\left(0\right)<0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left[f\left(\alpha^2-\alpha\right)-f\left(0\right)\right]x\right)=-\infty$

γ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ είναι και 1-1, οπότε:

$f\left(e^x-1\right)=f\left(0\right)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}e^x-1=0\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$

23314. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη – 2. και τον άξονα y΄y σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2.



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-2^+}f\left(x\right)$ **iii)** $\lim\limits_{x\to-2^-}f\left(x\right)$

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to-2^-}\ln\left(f\left(x\right)\right)$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i) Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)=2$, άρα $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=2$.

ii) $\lim\limits_{x\to-2^+}f\left(x\right)=0$ **iii)** $\lim\limits_{x\to-2^-}f\left(x\right)=0$

β) Θέτουμε $f\left(x\right)=u$.

i. Είναι $\lim\limits_{x\to-2^+}f\left(x\right)=0$ και $f\left(x\right)<0$ για κάθε $x\in\left(-2,-1\right)$, άρα $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{f\left(x\right)}=\lim\limits_{u\to0^-}\dfrac{1}{u}=-\infty$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to-2^-}f\left(x\right)=0$ και $f\left(x\right)>0$ για κάθε $x<-2$, άρα $\lim\limits_{x\to-2^-}\ln\left(f\left(x\right)\right)=\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$

34439. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x-1}, x\neq 1$ και

$g(x)=\frac{1}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=(f\circ g)(x)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)=(f\circ g)(x)$.

Αν $h(x)=\frac{e^x}{1-e^x}, \ x\in\mathbb{R}^*$ τότε:

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι '1-1'.

γ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Λύση

α) i. $D_h=D_{f\circ g}=\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}\Leftrightarrow$

$D_h=\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^{-x}\neq 1\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\neq 0\}=\mathbb{R}^*$.

ii. Για κάθε $x\neq 0$ είναι $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{\frac{1}{e^x}-1}=\frac{1}{\frac{1-e^x}{e^x}}=\frac{e^x}{1-e^x}$.

β) Για κάθε $x_1,x_2\neq 0$ με $h(x_1)=h(x_2)$ είναι $\frac{e^{x_1}}{1-e^{x_1}}=\frac{e^{x_2}}{1-e^{x_2}}\Leftrightarrow$

$e^{x_1}-e^{x_1}e^{x_2}=e^{x_2}-e^{x_1}e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$, άρα η h είναι 1-1.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1-e^x}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{e^x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{1-u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{-u}=-1$.

Συνέχεια Συνάρτησης

Θέμα 2ο

24767. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $e^{x_1}<e^{x_2}\Leftrightarrow e^{x_1}+1<e^{x_2}+1\Leftrightarrow \dfrac{1}{e^{x_1}+1}>\dfrac{1}{e^{x_2}+1}\Leftrightarrow$

$f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow\mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x+1}=0$.

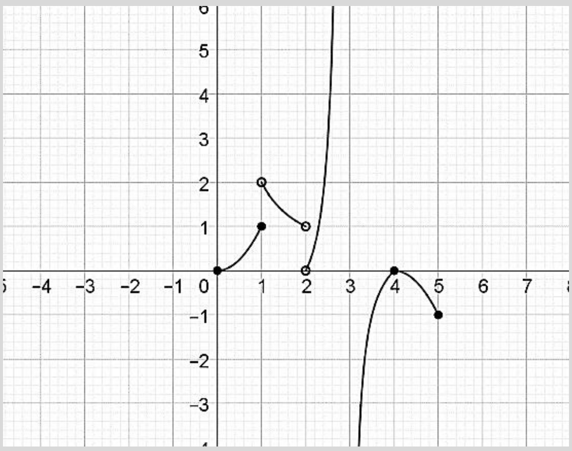
Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(0,1)$.

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\dfrac{1}{e^x+1}=y\Leftrightarrow e^x+1=\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{y}-1\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1-y}{y}$.

Άρα $f^{-1}(y)=\ln\dfrac{1-y}{y}$, $y\in(0,1)$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln\dfrac{1-x}{x}$, $x\in(0,1)$.

25749. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f=[0,2)\cup(2,3)\cup(3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες (0,0) και (4,0). Επίσης, δίνεται ότι f(1)=1.



Με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x\to4}f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{f(x)}$

Λύση

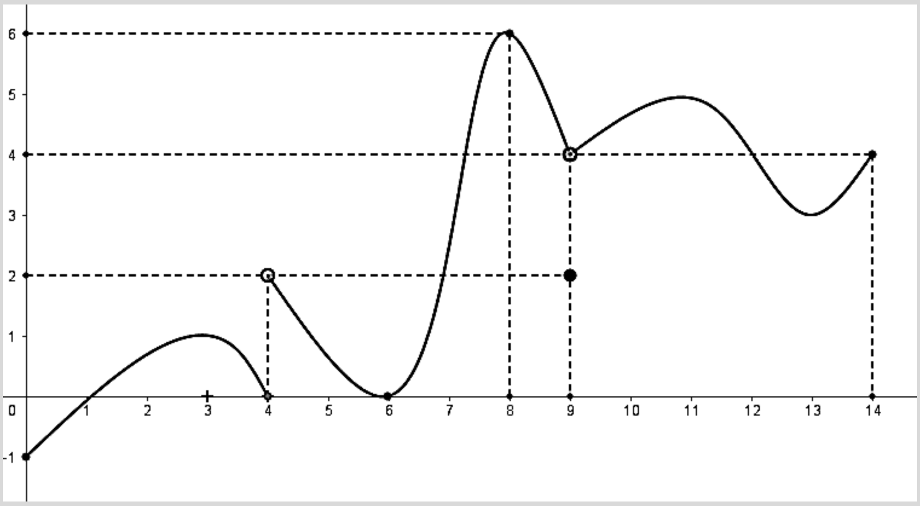
α) Επειδή $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1=f(1)\neq2=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, η f δεν είναι συνεχής στο x = 1.

β) Η f είναι συνεχής στο (0,1), $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1=f(1)$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0=f(0)$, οπότε η F είναι συνεχής στο [0,1].

γ) i. Είναι $\lim\limits_{x\to4}f(x)=0$.

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to4}f(x)=0$ και $f(x)<0$ για τιμές του x κοντά στο 4, είναι $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

27318. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

iv. $\lim\limits_{x\to 14} f(x)$ **v.** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Επειδή οι τετμημένες των σημείων της C_f δημιουργούν το διάστημα [0, 14], η f έχει πεδίο ορισμού το A = [0, 14]. Επειδή οι τεταγμένες των σημείων της C_f δημιουργούν το διάστημα $[-1,6]$, η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=[-1,6]$.

β) i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-1$

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=2$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)$, δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **.**

iii. Είναι $\lim\limits_{x\to 9^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 9^+} f(x)=4$, άρα $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=4$

iv. $\lim\limits_{x\to 14} f(x)=\lim\limits_{x\to 14^-} f(x)=4$

v. Στο σχήμα βλέπουμε ότι $\lim\limits_{x\to 6} f(x)=0$ και για κάθε $x\in(4,6)\cup(6,14)$ είναι $f(x)>0$, οπότε αν θέσουμε $f(x)=u$, έχουμε: $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u}=+\infty$.

γ) Επειδή δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ η f δεν είναι συνεχής στο 4. Επειδή $\lim\limits_{x\to 9} f(x)=4\neq f(9)=2$, η f δεν είναι συνεχής στο 9.

31548. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\left|f(x)-2x\right|\le(x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1)=2$.

β) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

γ) η f είναι συνεχής στο 1.

Λύση

α) Για x = 1 είναι $\left|f(1)-2\right|\le(1-1)^2 \Leftrightarrow \left|f(1)-2\right|\le 0 \Leftrightarrow f(1)-2=0 \Leftrightarrow f(1)=2$.

β) $\left|f(x)-2x\right|\le(x-1)^2 \Leftrightarrow -(x-1)^2\le f(x)-2x\le(x-1)^2 \Leftrightarrow 2x-(x-1)^2\le f(x)\le(x-1)^2+2x$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x-(x-1)^2\right)=2$, $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x+(x-1)^2\right)=2$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$.

γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, η f είναι συνεχής στο 1.

Θέμα 3ο

24761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2023-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2022$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2022$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο x = 0, άρα $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\left(2023-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\alpha \Leftrightarrow 2023-1=\alpha \Leftrightarrow \alpha=2022$$

β) Για κάθε x > 0 είναι $-1\le \eta\mu x\le 1 \Leftrightarrow -1\ge -\eta\mu x\ge 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\le -\frac{\eta\mu x}{x}\le -\frac{1}{x}\Leftrightarrow$

$$2023+\frac{1}{x}\le 2023-\frac{\eta\mu x}{x}\le 2023-\frac{1}{x}\Leftrightarrow 2023+\frac{1}{x}\le f(x)\le 2023-\frac{1}{x}.$$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2023+\frac{1}{x}\right)=2023,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2023-\frac{1}{x}\right)=2023$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2023$.

γ) Επειδή $f(0)=2022$, η x = 0 είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=2022$.

Για $x\neq 0$ είναι $f(x)=2022\Leftrightarrow 2023-\frac{\eta\mu x}{x}=2022\Leftrightarrow 1=\frac{\eta\mu x}{x}\Leftrightarrow \eta\mu x=x$ που είναι αδύνατη αφού για κάθε $x\neq 0$ είναι $|\eta\mu x|<|x|\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x$.

28684. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\kappa$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x)\le \eta\mu 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}=2$.

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$.

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

“ $\left|f(x)\cdot\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right|=-f(x)\cdot\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ κοντά στο 0 ”

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2\frac{\eta\mu 2x}{2x}\underset{\substack{x\to 0\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{2x=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}2\frac{\eta\mu u}{u}=2$.

β, γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο x=0, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$.

Για κάθε x>0 είναι $f(x) \le \frac{ημ2x}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \le \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{ημ2x}{x} \Leftrightarrow f(0) \le 2$ (1)

Για κάθε x<0 είναι $f(x) \ge \frac{ημ2x}{x} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \ge \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{ημ2x}{x} \Leftrightarrow f(0) \ge 2$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $f(0) = 2$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 2$.

δ) Επειδή $f(0) = 2 > 0$, κοντά στο 0 είναι $f(x) > 0$. Για κάθε $x \in \left(-\frac{π}{2}, 0\right)$ είναι εφx<0, και $\frac{εφx}{x} > 0$, οπότε $f(x) \cdot \frac{εφx}{x} > 0$. Για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$ είναι εφx> 0, και $\frac{εφx}{x} > 0$, οπότε $f(x) \cdot \frac{εφx}{x} > 0$.

Επομένως για κάθε x κοντά στο 0 είναι $f(x) \cdot \frac{εφx}{x} > 0$, οπότε $\left| f(x) \cdot \frac{εφx}{x} \right| = f(x) \cdot \frac{εφx}{x}$ και ο ισχυρισμός είναι λανθασμένος.

Θεωρήματα Συνέχειας

Θέμα 2ο

29834.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{9x^2+16}-\frac{5}{2}\ln(8x+1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
β) Να αποδείξετε ότι $f(0)>0$ και $f(1)<0$.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

α) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases}9x^2+16\geq 0\\ 8x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{ισχύει για κάθε } x\in\mathbb{R}\\ x>-\frac{1}{8}\end{cases}$, άρα $D_f=\left(-\frac{1}{8},+\infty\right)$.

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως σύνθεση και πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

β) $f(0)=\sqrt{16}-\frac{5}{2}\ln 1=4>0$,

$f(1)=\sqrt{9+16}-\frac{5}{2}\ln(8+1)=5-\frac{5}{2}\ln 9=\frac{5(1-\ln 9)}{2}<0$ γιατί

$1-\ln 9<0\Leftrightarrow 1<\ln 9\Leftrightarrow \ln e<\ln 9\Leftrightarrow e<9$ ισχύει.

γ) Είναι $f(0)f(1)<0$ και f συνεχής στο [0, 1], οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

34024.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{e^{2x}}$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε γραφική παράσταση:

α) Να βρείτε
i. Την μονοτονία της συνάρτησης f.
ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=3$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f.

Λύση

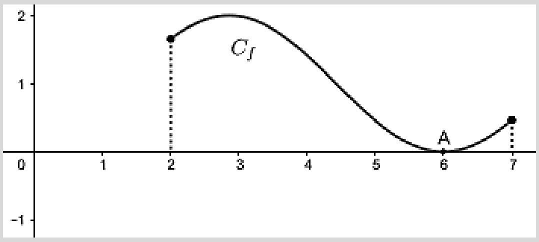
α) i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=\left(e^{-2x}\right)'=-2e^{-2x}<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

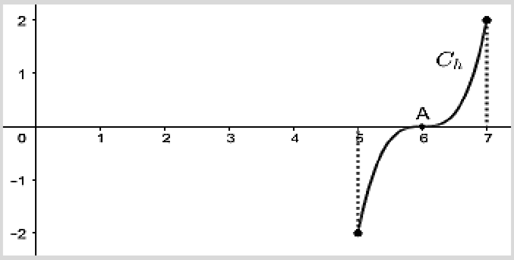
ii. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$.

β) Είναι $f(x)=3\Leftrightarrow e^{-2x}=3\Leftrightarrow -2x=\ln 2\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}\ln 3$, επομένως η ευθεία $y=3$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f.

36839. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 συνεχών συναρτήσεων των f και h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.





α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h.
β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:
i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού τους.
ii. Παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Λύση

α) Οι τετμημένες των σημείων της C_f δημιουργούν το σύνολο [2, 7], οπότε $D_f = [2,7]$. Όμοια $D_h = [5,7]$.

β) i. Η f είναι συνεχής στο [2,7], όμως $f(2)f(7) > 0$, αφού $f(2), f(7) > 0$, οπότε δεν ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού της.
Η h είναι συνεχής στο [5,7], όμως $f(5) < 0,\ f(7) > 0$, άρα $f(5)f(7) < 0$, οπότε ισχύουν για την h οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού της.

ii. Επειδή $f(6) = h(6) = 0$ και οι δύο συναρτήσεις παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Θέμα 4ο

23106. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε: $(g o f)(x) = |συνx|$, για κάθε $x \in [0,\pi]$.

α) i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |ημx|$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Να βρείτε την συνάρτηση f.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h:(0,\pi] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \dfrac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

Λύση

α) i. $(g o f)(x) = |συνx| \Leftrightarrow \sqrt{1 - f^2(x)} = |συνx| \Leftrightarrow 1 - f^2(x) = συν^2 x \Leftrightarrow$
$f^2(x) = 1 - συν^2 x \Leftrightarrow f^2(x) = ημ^2 x \Leftrightarrow |f(x)| = |ημx|$ (1)

ii. $f(x) = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0 \Leftrightarrow |ημx| = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pi$

β) Για κάθε $x \in (0,\pi)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επειδή $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ και επειδή $\eta\mu x>0$ στο $(0,\pi)$ η σχέση (1) γίνεται $f(x)=\eta\mu x,\ x\in(0,\pi)$. Επομένως $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0 \text{ ή } \pi\end{cases}=\eta\mu x,\ x\in[0,\pi]$.

γ) Γνωρίζουμε ότι $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για x = 0, άρα για κάθε $x\in[0,\pi]$ είναι $\eta\mu x\le x \Leftrightarrow \eta\mu x-x\le 0$.

$$\lim_{x\to 0}h(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\eta\mu x-x}\underset{\substack{x\to 0^+\Rightarrow\\ u\to 0^-\Rightarrow}}{\overset{\eta\mu x-x=u}{=}}\lim_{u\to 0^-}\frac{1}{u}=-\infty.$$

26640. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+x^3+2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι: $2x_1<2x_2\ (1)\Leftrightarrow e^{2x_1}<e^{2x_2}\ (2)$ και $x_1^3<x_2^3$ (3).
Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1), (2), (3) προκύπτει ότι $f(x_1)<f(x_2)$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.
Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}+x^3+2x\right)=0-\infty-\infty=-\infty$ και
$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{2x}+x^3+2x\right)=+\infty+\infty+\infty=+\infty$.
Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f(A)=\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $f\left(f^{-1}(x_1)\right)<f\left(f^{-1}(x_2)\right)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_2)\Leftrightarrow f^{-1}\nearrow\mathbb{R}$.

δ) $f^{-1}(x)=0\Leftrightarrow x=f(0)=1$.

29838. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x\neq 0$ ισχύει:
$xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi},+\infty\right)$.

Λύση

α) i. Για κάθε x > 0 είναι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu x|}{x}\le\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\le\frac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right)=0-0=0$.

ii. Για κάθε x > 0 είναι $xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x}\Leftrightarrow$

$xf(x)=1-\sigma\upsilon\nu x-x^2\eta\mu\frac{1}{x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu\frac{1}{x}$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0-1=-1$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\frac{1}{x}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to0^+}}{\overset{\frac{1}{x}=u\Leftrightarrow x=\frac{1}{u}}{=}}\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο $x_0=0$, οπότε

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}-x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0-0=0$

γ) Είναι $f\left(\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi}}-\frac{1}{\pi}\eta\mu\pi=\pi\left(1-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\pi}\right)>0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$ υπάρχει πολύ μεγάλος αριθμός α, τέτοιος ώστε $f(\alpha)<0$.

Είναι $f\left(\frac{1}{\pi}\right)f(\alpha)<0$ και η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{\pi},\alpha\right]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano,

η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi},\alpha\right)\subseteq\left(\frac{1}{\pi},+\infty\right)$.

Παράγωγοι

Ορισμός παραγώγου

Θέμα 2ο

24756. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$.

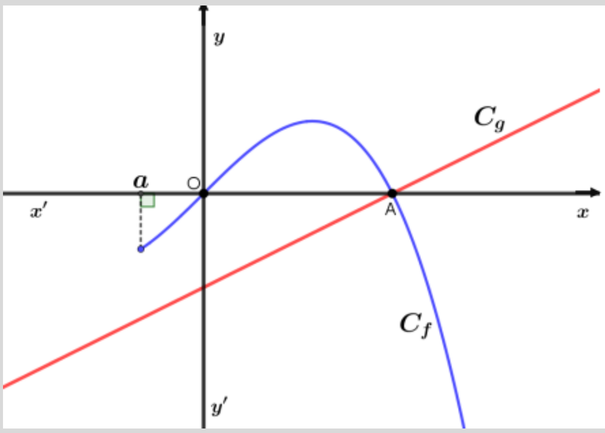
Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$, άρα $f'(0)=2$.

β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0 είναι και συνεχής σε αυτό άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{2}{1}=2$.

25234. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2},\ \ x\in\mathbb{R}$.



Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα x'x εκτός από τα σημεία Ο και Α.

α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{g(x)}$.

β) Αν είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}$.

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{x-1}\underset{\substack{x\to 1^-\Rightarrow\\ u\to 0^-}}{\overset{x-1=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^-}\dfrac{2}{u}=-\infty$

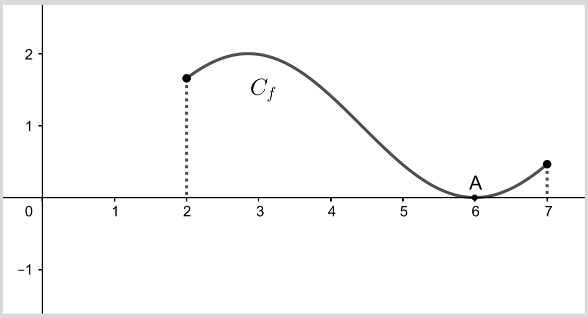
β) Είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

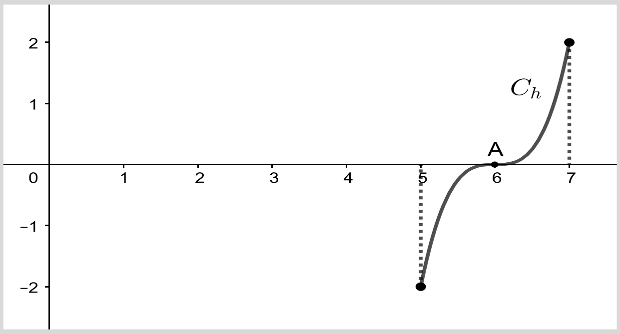
Επειδή οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$, είναι $f(1)=g(1)=0$.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\left[g(x)\dfrac{1}{f(x)}\right]=-\dfrac{1}{2}(-\infty)=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,0)$.

36840.Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f και h. Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα x΄x στο σημείο του A(6,0). Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η h παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.





α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{h(x)}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)}{x-6}$

Λύση

α) Οι τετμημένες των σημείων της C_f δημιουργούν το σύνολο [2, 7], οπότε $D_f=[2,7]$. Όμοια $D_h=[5,7]$.

β) i. Είναι $\lim\limits_{x\to 6}f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο 6 , άρα $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 6}h(x)=0$, $h(x)<0$ για κάθε $x\in(5,6)$, $h(x)>0$ για κάθε $x\in(6,7)$, άρα

$\lim\limits_{x\to 6^-}\dfrac{1}{h(x)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 6^+}\dfrac{1}{h(x)}=+\infty$, οπότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{h(x)}$.

iii. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{f(x)-f(6)}{x-6}=f'(6)=0$, επειδή η C_f εφάπτεται του άξονα x΄x στο σημείο A.

Κανόνες παραγώγισης

Θέμα 2ο

27315.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{αν } x<2\\ \alpha x^2-4, & \text{αν } x\geq 2\end{cases}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0=2$, δηλαδή τα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

γ) Αν α = 2, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f.

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\alpha x^2-4\right)=4\alpha-4$.

β) Η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ όταν $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 4\alpha-4=4\Leftrightarrow 4\alpha=8\Leftrightarrow \alpha=2$

γ) Για α = 2 είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=x+2, & \text{αν } x<2\\ 2x^2-4, & \text{αν } x\geq 2\end{cases}$.

Για x < 2 είναι $f'(x)=1$ και για x > 2 είναι $f'(x)=4x$. Στο x = 2 έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{x-2}}=1$,

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x^2-4-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=8$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x = 2.

31743.Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x\eta\mu x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=f'(x)-\dfrac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν $\varphi(0)<0$ και $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$, $f'(0)=0$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}=1$.

β) Είναι $\varphi(0)=f'(0)-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}<0$ αι $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{1}{3}=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}>0$.

γ) Η φ είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή $\varphi(0)\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση

$\varphi(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

34437. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x+2x$, $x>0$ και $g(x)=e^{x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

γ) Να ορίσετε την αντίστροφο συνάρτηση της g.

Λύση

α) Είναι $D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^{x+2}>0\right\}=\mathbb{R}$ και

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln e^{x+2}+2e^{x+2}=x+2+2e^{x+2}$.

β) Είναι $g'(x)=e^{x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ είναι $x_1+2<x_2+2\Leftrightarrow e^{x_1+2}<e^{x_2+2}\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow g\nearrow\mathbb{R}\Rightarrow g$ 1-1.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=y\Leftrightarrow e^{x+2}=y$ και για $y>0$ είναι $x+2=\ln y\Leftrightarrow x=\ln y-2$, άρα $f^{-1}(y)=\ln y-2,\ y>0$, οπότε $f^{-1}(x)=\ln x-2,\ x>0$.

Εφαπτομένη καμπύλης

Θέμα 2ο

24757. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45°.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$.

Λύση

α) Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45° είναι $f'(0)=\varepsilon\varphi 45^\circ=1$.

β) ε: $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y-1=x\Leftrightarrow y=x+1$

γ) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$.

25762. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2+x, & x\le 0 \\ \eta\mu x, & x>0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $f'(0)=1$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της O(0, 0).

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(-x^2+x\right)=0=f(0),\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x^2+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{x}(-x+1)}{\cancel{x}}=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=1$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ με $f'(0)=1$.

γ) ε: $y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=x$.

26630. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x & ,\ \alpha\nu\ x<0 \\ 1 & ,\ \alpha\nu\ x=0 \\ \sigma\upsilon\nu x & ,\ \alpha\nu\ x>0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $\varphi'(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$ και

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\varphi'(0)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

γ) Είναι $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}=0$. Για $x>0$ είναι $f'(x)=-\eta\mu x$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

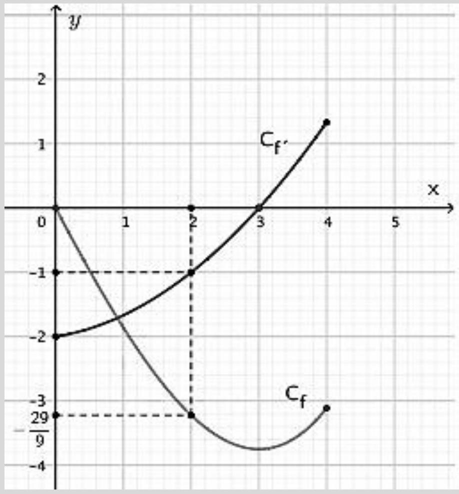
Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y=-x+\dfrac{\pi}{2}$

26712. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα [0, 4], και της παραγώγου της, f ΄.

α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_o = 2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_o = 2$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x.



Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο (2, -1) ανήκει στη γραφική παράσταση της f ΄, επομένως η κλίση της συνάρτησης f στο $x_o = 2$ είναι το $f'(2) = -1$.

β) (ε): $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y + \frac{29}{9} = -x + 2 \Leftrightarrow y = -x - \frac{11}{9}$

γ) Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x, ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega = f'(2) = -1 \Leftrightarrow \omega = 135^\circ$.

28302. Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$.

Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $gof:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $(gof)(0)$.

β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$.

γ) Να βρείτε την παράγωγο της gof στο $x_0 = 0$.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της gof στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Λύση

α) $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-2) = -(-2) = 2$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = -1$, οπότε $g'(-2) = -1$.

γ) Είναι $(gof)'(x) = \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x))f'(x)$ και $(gof)'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(-2)\cdot 0 = 0$

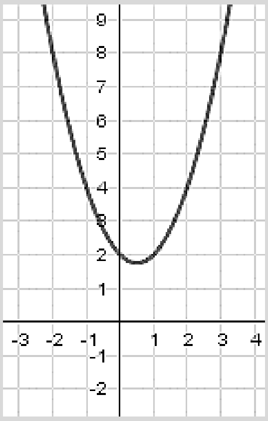
δ) Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y - (g\circ f)(0) = (gof)'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

33816. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=x^2-x+2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $B(1,2)$.

γ) Αφού αντιγράψετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g, να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y=x+1$.



Λύση

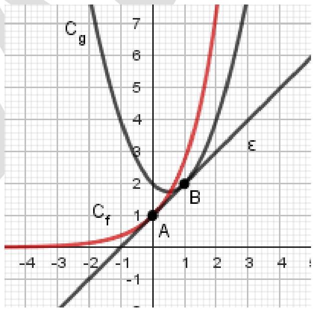
α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=e^x$ και για $x=0$ είναι $f'(0)=1$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η ευθεία ε: $y-f(0)=f'(0)x \Leftrightarrow y=x+1$.

β) Το σημείο B είναι κοινό σημείο των ε, C_g.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=2x-1$ και για $x=1$ είναι $g'(1)=1=\lambda_\varepsilon$, οπότε η ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $B(1,2)$.

γ) σχήμα



33632. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ -x^2+1, & x>0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o=0$ και να σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

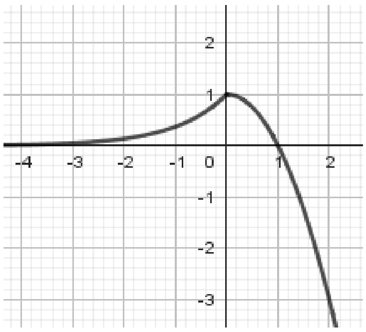
β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0,f(0))$.

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^x=1=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2+1)=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το κομμάτι της γραφικής παράστασης της $y=e^x$ για $x\le 0$ και από το κομμάτι της παραβολής $y=-x^2+1$ για $x>0$.



β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, γιατί αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$, είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0) \text{ και } g'(x)=e^x,\ g'(0)=e^0=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x^2-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=0.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$, οπότε δεν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0, f(0))$.

Θέμα 4ο

28340. Έστω μια συνάρτηση $f:(-\infty, 0)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x) = -x+1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, έχει εξίσωση $y = g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$.

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων fog και gof,

ii. τις παραγώγους $(fog)'(2)$ και $(gof)'(-1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_{fog} στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 2$ και η εφαπτομένη της C_{gof} στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$, ταυτίζονται.

Λύση

α) Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία $y = -x+1$, ισχύει ότι $f(-1) = -(-1)+1 = 2$ και $f'(-1) = \lambda_g = -1$.

β) i. $D_{fog} = \{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\} = \{x\in\mathbb{R} \,/\, -x+1<0\} =$
$\{x\in\mathbb{R} \,/\, x>1\} = (1,+\infty)$.

$D_{gof} = \{x\in D_f \,/\, f(x)\in D_g\} = \{x<0 \,/\, f(x)\in\mathbb{R}\} = (-\infty,0)$.

ii. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = -1$.

Είναι $(fog)'(x) = \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))g'(x)$, οπότε $(fog)'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(-1)(-1) = 1$.

Είναι $(gof)'(x) = \left(g(f(x))\right)' = g'(f(x))f'(x)$, οπότε

$(gof)'(-1) = g'(f(-1))f'(-1) = g'(2)(-1) = -1(-1) = 1$.

γ) Η εφαπτομένη της C_{gof} στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$ έχει εξίσωση

$\varepsilon_1 : y-(gof)(-1) = (gof)'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y-g(2) = (x+1) \Leftrightarrow y+1 = x+1 \Leftrightarrow y = x$.

Η εφαπτομένη της C_{fog} στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 2$ έχει εξίσωση

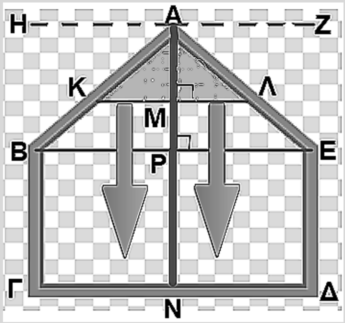
$\varepsilon_1 : y-(fog)(2) = (fog)'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-f(-1) = (x-2) \Leftrightarrow y-2 = x-2 \Leftrightarrow y = x$.

Η ευθεία y = x είναι κοινή εφαπτομένη των C_{fog} και C_{gof}.

Ρυθμός μεταβολής

Θέμα 4ο

25257. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο $ΒΓΔΕ$ και το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΕ$. Είναι $ΑΡ = 0,8\,m$, $ΒΕ = 1,6\,m$, $ΑΜ = x\ m$, $ΒΓ = 1\,m$. Το ορατό κάτω μέρος $ΚΛ$ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση $ΗΖ$, με σταθερό ρυθμό, ώστε το $Μ$ να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΝ$ (με $ΑΜ \neq 0$).



Αν $Ε = Ε(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό $Ε$, ισχύει

$$E(x)=\begin{cases} x^2 & ,\ \text{αν } x\in\left(0,\dfrac{4}{5}\right) \\ \dfrac{8}{5}x-\dfrac{16}{25}, & \text{αν } x\in\left[\dfrac{4}{5},\dfrac{9}{5}\right] \end{cases},\ \text{σε } m^2.$$

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $Ε$ ως προς x, όταν $x=\dfrac{4}{5}\ m$, είναι ίσος με $E'\left(\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{8}{5}\ m^2/m$.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $Ε$ ως προς τον χρόνο t, τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \dfrac{4}{5}\ m$, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0,08\ m/s$ για κάθε $t \geq 0$.

Λύση

α) Επειδή ΚΛ//ΒΕ, το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές και αυτό, οπότε το ΑΜ εκτός από ύψος είναι και διάμεσος του τριγώνου.

Τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΑΡΕ είναι όμοια, οπότε $\dfrac{ΑΜ}{ΑΡ}=\dfrac{ΜΛ}{ΡΕ}\Leftrightarrow\dfrac{x}{0,8}=\dfrac{ΜΛ}{0,8}\Leftrightarrow ΜΛ=x$

Όταν το Μ κινείται εσωτερικά του τμήματος ΑΡ, δηλαδή όταν $0<x<0,8=\dfrac{4}{5}$, τότε

$$E(x)=(ΑΚΛ)=\frac{1}{2}(ΚΛ)(ΑΜ)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}(ΜΛ)x=x^2.$$

Όταν το Μ κινείται στο τμήμα ΡΝ, δηλαδή όταν $\dfrac{4}{5}\leq x\leq 1,6=\dfrac{8}{5}$, τότε

$$E(x)=(ΑΒΕ)+(ΒΚΛΕ)=\frac{1}{2}\cdot 1,6\cdot 0,8+(ΒΕ)(ΡΜ)\Leftrightarrow$$

$$E(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{4}{5}+1,6\cdot(x-0,8)=\frac{16}{25}+\frac{8}{5}\cdot\left(x-\frac{4}{5}\right)=\frac{16}{25}+\frac{8x}{5}-\frac{32}{25}=\frac{8x}{5}-\frac{16}{25}.$$

Επομένως $$E(x)=\begin{cases} x^2 & ,\ \text{αν } x\in\left(0,\dfrac{4}{5}\right) \\ \dfrac{8}{5}x-\dfrac{16}{25}, & \text{αν } x\in\left[\dfrac{4}{5},\dfrac{8}{5}\right] \end{cases}.$$

β) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}\dfrac{E(x)-E\left(\frac{4}{5}\right)}{x-\frac{4}{5}}=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}\dfrac{x^2-\left(\frac{8}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{16}{25}\right)}{x-\frac{4}{5}}=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}\dfrac{x^2-\frac{16}{25}}{x-\frac{4}{5}}=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}\dfrac{\cancel{\left(x-\frac{4}{5}\right)}\left(x+\frac{4}{5}\right)}{\cancel{x-\frac{4}{5}}}=\dfrac{8}{5}$,

$\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+}\dfrac{E(x)-E\left(\frac{4}{5}\right)}{x-\frac{4}{5}}=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}\dfrac{\frac{8x}{5}-\frac{16}{25}-\frac{16}{25}}{x-\frac{4}{5}}=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}\dfrac{\frac{8x}{5}-\frac{32}{25}}{x-\frac{4}{5}}=$

$\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}\dfrac{\frac{8}{5}\cancel{\left(x-\frac{4}{5}\right)}}{\cancel{x-\frac{4}{5}}}=\dfrac{8}{5}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^-}\dfrac{E(x)-E\left(\frac{4}{5}\right)}{x-\frac{4}{5}}=\lim\limits_{x\to\frac{4}{5}^+}\dfrac{E(x)-E\left(\frac{4}{5}\right)}{x-\frac{4}{5}}=\dfrac{8}{5}$, είναι $E'\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{5}m^2/m$.

γ) Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία $x=\frac{4}{5}m$, δηλαδή $x(t_0)=\frac{4}{5}m$, τότε $E'(x(t_0))=\frac{8}{5}\ m^2/m$

Είναι $E(t)=E(x(t))$, οπότε $E'(t)=E'(x(t))x'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0:

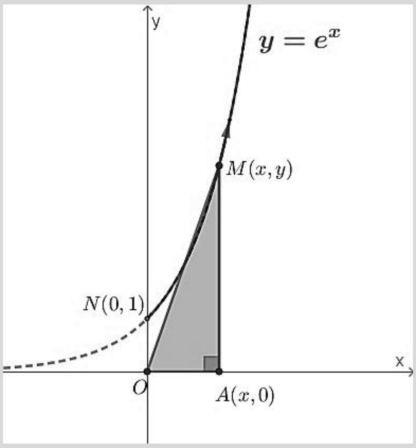
$E'(t_0)=E'(x(t_0))\cdot 0{,}08=\frac{8}{5}\cdot\frac{2}{25}=\frac{16}{125}\ m^2/s$.

28685.α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x+xe^x=3e^2,\ x\in(0,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=2$.

β) Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο $N(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=e^x,\ \ x\geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm/sec$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΑΜ, όπου $O(0,0),\ A(x,0)$ και $M(x,y)$ είναι $E(x)=\frac{1}{2}xe^x,\ \ x\geq 0$.

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε είναι $3e^2cm^2/sec$.



Λύση

α) Έστω $f(x)=e^x+xe^x-3e^2,\ x>0$. Παρατηρούμε ότι $f(2)=e^2+2e^2-3e^2=0$.

Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $x_1<x_2$ (1) είναι $e^{x_1}<e^{x_2}$ (2). Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει: $x_1e^{x_1}<x_2e^{x_2}\Leftrightarrow x_1e^{x_1}-3e^2<x_2e^{x_2}-3e^2$ (3).

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (2), (3) προκύπτει: $e^{x_1}+x_1e^{x_1}-3e^2<e^{x_2}+x_2e^{x_2}-3e^2\Leftrightarrow$ $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα είναι και 1-1.

Είναι $e^x+xe^x=3e^2\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=f(2)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}x=2$.

β) i. $(OAM)=E(x)=\frac{1}{2}(AO)(AM)=\frac{1}{2}xe^x,\ x\geq 0$

ii. Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x'(t_0)=2$ cm/sec, $E'(t_0)=3e^2\ cm^2/sec$.

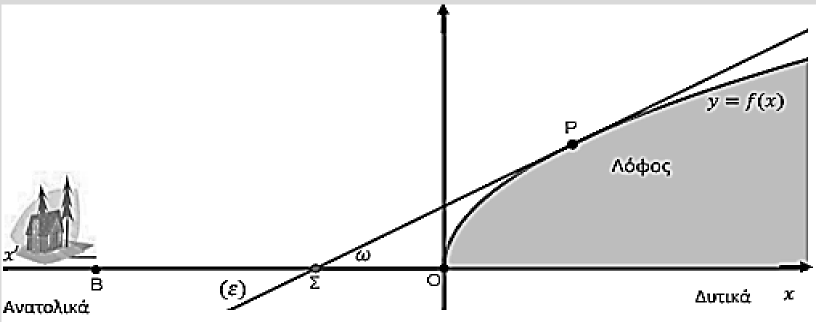
Είναι $E(t)=\frac{1}{2}x(t)e^{x(t)},\ \ t\geq 0$. Είναι $E'(t)=\frac{1}{2}x'(t)e^{x(t)}+\frac{1}{2}x(t)e^{x(t)}x'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0:

$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)e^{x(t_0)}+\frac{1}{2}x(t_0)e^{x(t_0)}x'(t_0)\Leftrightarrow 3e^2=\frac{1}{2}\cdot 2e^{x(t_0)}+\frac{1}{2}x(t_0)e^{x(t_0)}\cdot 2\Leftrightarrow$

$e^{x(t_0)}+x(t_0)e^{x(t_0)}=3e^2\overset{\alpha)\ \sigma\kappa\acute{\varepsilon}\lambda o\varsigma}{\Leftrightarrow}x(t_0)=2$.

Επομένως τη χρονική στιγμή t_0 το κινητό βρίσκεται στο σημείο $M(2,e^2)$.

33577.Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση B του αρνητικού ημιάξονα Ox'. Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Ox, υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ για $x\geq 0$.



Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.
Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του ΟΣ, η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου t, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Θεωρούμε $t=0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο Ο του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά. Ας είναι $\hat{\omega}=P\hat{\Sigma}O$.

α) Αν το σημείο P έχει συντεταγμένες $P(x_P,y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου Σ είναι $x_\Sigma=-x_P$.

β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t>0$ ισχύει $\varepsilon\varphi(\omega(t))=\frac{1}{2}(x_P(t))^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά (ΟΣ) τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\omega=\frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή t_0 η γωνία ω μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16}$rad ανά λεπτό. Δίνεται ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=1+\varepsilon\varphi^2\omega$.

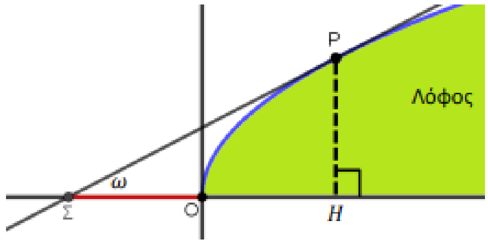
Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Η (ε) έχει εξίσωση: $y-f(x_P)=f'(x_P)(x-x_P)\Leftrightarrow y-\sqrt{x_P}=\frac{1}{2\sqrt{x_P}}x-\frac{x_P}{2\sqrt{x_P}}\Leftrightarrow$

$y=\frac{1}{2\sqrt{x_P}}x-\frac{x_P\sqrt{x_P}}{2\left(\sqrt{x_P}\right)^2}+\sqrt{x_P}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{x_P}}x-\frac{\cancel{x_P}\sqrt{x_P}}{2\cancel{x_P}}+\sqrt{x_P}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2\sqrt{x_P}}x+\frac{\sqrt{x_P}}{2}$.

Για y =0 είναι $0=\frac{1}{2\sqrt{x_P}}x+\frac{\sqrt{x_P}}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{x_P}}x=-\frac{\sqrt{x_P}}{2}\Leftrightarrow x=-x_P$, άρα $x_\Sigma=-x_P$.



β) Έστω Η η προβολή του Ρ στον άξονα x΄x.
Στο τρίγωνο ΡΗΣ είναι

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{PH}{\Sigma H}=\frac{y_P}{2x_P}=\frac{\sqrt{x_P}}{2x_P}=\frac{\left(\sqrt{x_P}\right)^2}{2x_P\sqrt{x_P}}=\frac{\cancel{x_P}}{2\cancel{x_P}\sqrt{x_P}}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x_P}}=\frac{1}{2}x_P^{-\frac{1}{2}}$$ άρα $\varepsilon\varphi(\omega(t))=\frac{1}{2}(x_P(t))^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Είναι $\omega(t_0)=\frac{\pi}{6}$, $\omega'(t_0)=\frac{1}{16}$, $\varepsilon\varphi(\omega(t_0))=\frac{1}{2}(x_P(t_0))^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2\sqrt{x_P(t_0)}}\Leftrightarrow\frac{3}{9}=\frac{1}{4x_P(t_0)}\Leftrightarrow x_P(t_0)=\frac{3}{4}.$$

Είναι $(O\Sigma)(t)=|x_S(t)|=x_P(t)$, οπότε $(O\Sigma)'(t_0)=x_P{'}(t_0)$.

Είναι $\left(\varepsilon\varphi(\omega(t))\right)'=\left(\frac{1}{2}(x_P(t))^{-\frac{1}{2}}\right)'\Leftrightarrow\frac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=-\frac{1}{4}(x_P(t))^{-\frac{3}{2}}x_P(t)\Leftrightarrow$

$$\omega'(t)\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t)\right)=-\frac{1}{4}(x_P(t))^{-\frac{3}{2}}x_P(t).$$

Για $t=t_0$ είναι $\omega'(t_0)\left(1+\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)\right)=-\frac{1}{4}(x_P(t_0))^{-\frac{3}{2}}x_P{'}(t_0)\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{16}\left(1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}x_P{'}(t_0)\Leftrightarrow x_P{'}(t_0)=...=\frac{\sqrt{3}}{8}\,m/min$$

36815. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2,2]$, για την οποία ισχύει $f^2(x)+x^2=4$ για κάθε $x\in[-2,2]$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, τότε να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

δ) Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f. Καθώς περνάει από το σημείο $B\left(-1,\sqrt{3}\right)$, η τεταγμένη του y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του κινητού τη χρονική στιγμή που περνάει από το Β.

Λύση

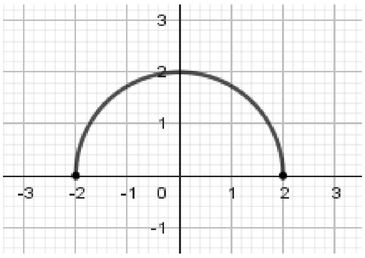
α) Έστω $\rho\in[-2,2]$ ρίζα της $f(x)=0$. Για x = ρ είναι $f^2(\rho)+\rho^2=4\Leftrightarrow\rho^2=4\Leftrightarrow\rho=\pm2$.

β) Για κάθε $x\in[-2,2]$ είναι $f^2(x)+x^2=4\Leftrightarrow f^2(x)=4-x^2\Leftrightarrow|f(x)|=\sqrt{4-x^2}$ (1)

Για κάθε $x\in(-2,2)$ είναι $f(x)\neq0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Είναι $f(0)=1>0$, άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(-2,2)$, οπότε η (1) γίνεται $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

$$\text{Άρα } f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2}, & x\in(-2,2)\\ 0, & x=-2 \text{ ή } x=2\end{cases}=\sqrt{4-x^2},\ x\in[-2,2].$$

γ) Για κάθε $x\in[-2,2]$ είναι $f(x)=y\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=y\geq0\Rightarrow 4-x^2=y^2\Leftrightarrow x^2+y^2=4$.



Η γραφική παράσταση της f είναι το ημικύκλιο κέντρου O(0,0) και ακτίνας 2 που δεν βρίσκεται κάτω από τον x΄x.

δ) Έστω ότι το κινητό έχει συντεταγμένες $(x(t),y(t))$.

Έστω $t_0>0$ η χρονική στιγμή που διέρχεται από το B, τότε $x(t_0)=-1$ και $y(t_0)=\sqrt{3}$.

Επειδή εκείνη τη χρονική στιγμή η τεταγμένη του y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, είναι $y'(t_0)=2\mu./\sec$.

Είναι $x^2(t)+y^2(t)=4 \Rightarrow \left(x^2(t)+y^2(t)\right)'=(4)' \Leftrightarrow$

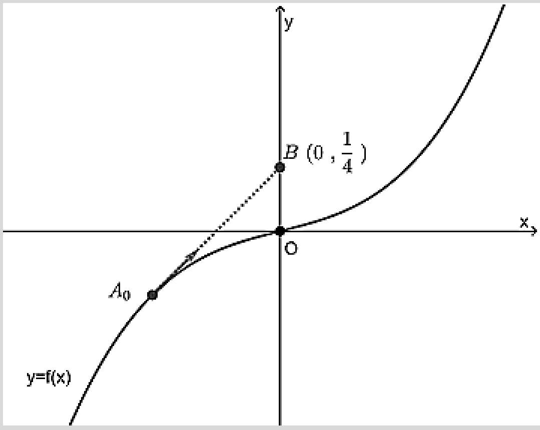
$2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0$.

Για $t=t_0$ είναι $x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)=0 \Leftrightarrow -1\cdot x'(t_0)+\sqrt{3}\cdot 2=0 \Leftrightarrow x'(t_0)=2\sqrt{3}$ μ/sec.

36787.Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3+\frac{1}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha,f(\alpha))$ έχει εξίσωση $y=\left(3\alpha^2+\frac{1}{4}\right)x-2\alpha^3$.

β) Ένα αυτοκίνητο κινείται τη νύχτα, κατά μήκος ενός επίπεδου δρόμου. Θεωρήστε το αυτοκίνητο ως σημείο στο επίπεδο Oxy και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, ως τον δρόμο που αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0, που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο A_0, οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο $B\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A_0.

ii. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_0, είναι 2, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου, τη χρονική στιγμή t_0.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+\frac{1}{4}$. Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση:

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y-\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha=\left(3\alpha^2+\frac{1}{4}\right)(x-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$y=\left(3\alpha^2+\frac{1}{4}\right)x-3\alpha^3-\frac{1}{4}\alpha+\alpha^3+\frac{1}{4}\alpha \Leftrightarrow y=\left(3\alpha^2+\frac{1}{4}\right)x-2\alpha^3$$

β) i. Η εφαπτομένη της C_f στο A_0 διέρχεται από το B όταν $\frac{1}{4}=\left(3\alpha^2+\frac{1}{4}\right)\cdot 0-2\alpha^3 \Leftrightarrow \alpha^3=-\frac{1}{8} \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$.

Τότε $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, άρα $A_0\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$.

ii. Έστω $A\left(x(t),y(t)\right)$, $y(t)=x^3(t)+\frac{1}{4}x(t)$ με $x(t_o)=-\frac{1}{2}$, $x'(t_0)=2$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου είναι $y'(t)=3x^2(t)x'(t)+\frac{1}{4}x'(t)$ και τη χρονική στιγμή $t_o: y'(t_o)=3x^2(t_o)x'(t_o)+\frac{1}{4}x'(t_o)=3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot 2=2$.

Θεώρημα Rolle

Θέμα 2ο

31643.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-3x^3-x^2+9x,\ \ x\in[1,2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$.

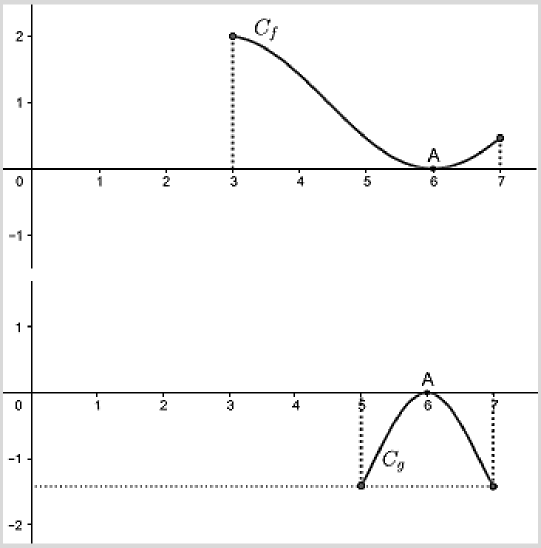
β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-9x^2-2x+9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

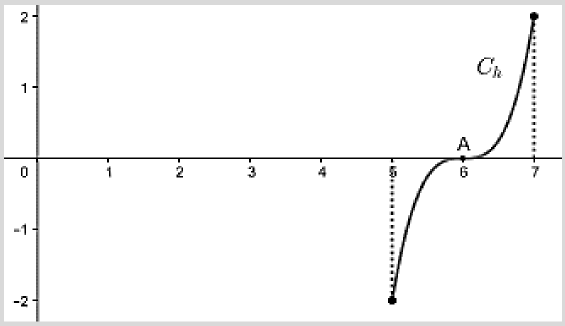
Λύση

α) Η f είναι συνεχής στο [1, 2] ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (1, 2) με $f'(x)=4x^3-9x^2-2x+9$. Είναι $f(1)=1-3-1+9=6,\ \ f(2)=16-24-4+18=6$, δηλαδή $f(1)=f(2)$, οπότε εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο [1, 2].

β) Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, η εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-9x^2-2x+9=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

36842.Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f, g και h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.





α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f, g και h.
β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:
i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους.
ii. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της.

Λύση

α) Οι προβολές των σημείων της C_f στον άξονα x΄x δημιουργούν το διάστημα [3, 7], οπότε $D_f = [3,7]$.
Όμοια $D_g = [5,7] = D_h$.

β) i. Στις f, h είναι $f(3) \neq f(7)$ και $h(5) \neq h(7)$, οπότε δεν ισχύουν για αυτές τις συναρτήσεις οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους.
Η g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, είναι παραγωγίσιμη στο (5, 7) και $g(5) = g(7)$, οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού της.

ii. Επειδή και οι τρείς συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες και οι γραφικές τους παραστάσεις εφάπτονται στον άξονα x΄x στο σημείο Α(6,0), είναι $f'(6) = g'(6) = h'(6) = 0$,οπότε η παράγωγό τους έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

36851.Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.
β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1,1]$ και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-5x^2 - 3x + 1) = 1 = f(0)$, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 1) = 1$.
Επειδή $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$ η f είναι συνεχής στο 0.

β) Είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-5x^2 - 3x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cancel{x}(-5x - 3)}{\cancel{x}} = -3$ και

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 3x + 1 - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cancel{x}(x - 3)}{\cancel{x}} = -3$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -3$ η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = -3$.

γ) Η f είναι συνεχής στο [-1, 1] γιατί είναι συνεχής στα διαστήματα [-1,0], (0,1] ως πολυωνυμική και όπως είδαμε είναι συνεχής και στο 0.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο (-1, 1) γιατί είναι παραγωγίσιμη στο (-1, 0) με $f'(x) = -10x - 3$, παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f'(x) = 2x - 3$ και όπως είδαμε είναι παραγωγίσιμη και στο 0.
Είναι $f(-1) = -5(-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = -1$, $f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$, δηλαδή $f(-1) = f(1)$.
Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο [-1, 1], οπότε υπάρχει $x_0 \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Αν $x_0 \in (-1,0)$ τότε $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -10x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{3}{10}$ δεκτή.

Αν $x_0 \in (0,1)$ τότε $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{3}{2}$ απορρίπτεται.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θέμα 2ο

24283.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{αν } x\in[-1,2] \\ x-1, & \text{αν } x\in(2,5] \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$.

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$.

Λύση

α) Σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,2]$, $(2,5]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική. Στο $x_0=2$ είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-3)=1=f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)=1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$, η f είναι συνεχής στο $x_0=2$, οπότε η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-3-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=4$ και

$\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-1-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x-2}=1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$.

γ) Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$, δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,5)$. Η f είναι συνεχής στο $[-1,5]$.

36827.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x,\ x>0$ και $g(x)=e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση g έχει αντίστροφη και να αποδείξετε ότι $g^{-1}=-f$.

β) Να αποδείξετε ότι $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

γ) Έστω $h(x)=(g\circ f)(x)$.

Να βρείτε τον μοναδικό αριθμό ξ ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση h στο διάστημα$[2,8]$.

Λύση

α) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)=y\Leftrightarrow e^{-x}=y$.

Για y > 0 είναι $-x=\ln y\Leftrightarrow x=-\ln y$, άρα $g^{-1}(y)=-\ln y,\ y>0$, οπότε $g^{-1}(x)=-\ln x=-f(x)$.

β) $A_{g\circ f}=\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_g\}=\{x>0\ /\ \ln x\in\mathbb{R}\}=(0,+\infty)$. $(g\circ f)(x)=g(f(x))=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=\frac{1}{x}$.

γ) Η h είναι συνεχής στο [2, 8] και παραγωγίσιμη στο (2, 8) με $h'(x)=-\frac{1}{x^2}$, σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ.

υπάρχει $\xi\in(2,8)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi)=\frac{h(8)-h(2)}{8-2}\Leftrightarrow -\frac{1}{\xi^2}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{1}{2}}{6}\Leftrightarrow -\frac{1}{\xi^2}=\frac{\frac{1}{8}-\frac{4}{8}}{6}\Leftrightarrow -\frac{1}{\xi^2}=\frac{-\frac{3}{8}}{6}\Leftrightarrow$

$-\frac{1}{\xi^2}=-\frac{3}{48}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi^2}=\frac{1}{16}\Leftrightarrow\xi^2=16\overset{\xi\in(2,8)}{\Leftrightarrow}\xi=4$.

Θέμα 4ο

29150. Η συνάρτηση $x(t)=(t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

α) i. Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν.

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά.

β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διένυσε το κινητό Α.

γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό.

Λύση

α) i. Η ταχύτητα του κινητού είναι $\upsilon(t)=x'(t)=(t-1)^2+2(t-2)(t-1)=(t-1)(t-1+2t-4)$

$\upsilon(t)=(t-1)(3t-5)=0\Leftrightarrow(t-1)(3t-5)=0\Leftrightarrow t=1$ ή $\left(3t-5=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{3}\right)$.

ii. Το κινητό κινήθηκε δεξιά τα χρονικά διαστήματα $[0,1)$, $\left(\frac{5}{3},3\right]$ και αριστερά στο χρονικό διάστημα $\left(1,\frac{5}{3}\right)$.

t	0	1	5/3	3
$x'(t)$	+	0	- 0	+

β) Στο χρονικό διάστημα από t=0 έως t=1sec το κινητό διανύει διάστημα

$S_1=|x(1)-x(0)|=\left|0-(0-2)(0-1)^2\right|=2$ m.

Στο χρονικό διάστημα από t=1 έως t=5/3 sec το κινητό διανύει διάστημα

$$S_2=\left|x\left(\frac{5}{3}\right)-x(1)\right|=\left|\left(\frac{5}{3}-2\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)^2-0\right|=\left|\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{9}\right|=\frac{4}{27}\text{ m.}$$

Στο χρονικό διάστημα από t=5/3 έως t=3 sec το κινητό διανύει διάστημα

$$S_3=\left|x(3)-x\left(\frac{5}{3}\right)\right|=\left|(3-2)(3-1)^2-\left(\frac{5}{3}-2\right)\left(\frac{5}{3}-1\right)^2\right|=\left|4+\frac{4}{27}\right|=\frac{112}{27}\text{m}.$$

Το συνολικό διάστημα που διανύει το κινητό είναι $S=S_1+S_2+S_3=2+\frac{4}{27}+\frac{112}{27}=\frac{170}{27}$m.

γ) Η μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $\left[1,\frac{5}{3}\right]$ είναι $\bar{\upsilon}=\frac{S_2}{\frac{5}{3}-1}=\frac{\frac{4}{27}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{9}$.

Για τη συνάρτηση x εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left[1,\frac{5}{3}\right]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μία χρονική στιγμή $t_1\in\left(1,\frac{5}{3}\right)$ τέτοια, ώστε $x'(t_1)=\frac{x\left(\frac{5}{3}\right)-x(1)}{\frac{5}{3}-1}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow x'(t_1)=\bar{\upsilon}$.

Σταθερή συνάρτηση

Θέμα 4ο

23199.στω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$να ισχύει $xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}$ και $f(e)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x,\ x>1$είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f.

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x},\ x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,\ 0)$ και $B(e,\ 1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$.

Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=2f(x)f'(x)-\frac{1}{x}$. Όμως για κάθε $x>1$ είναι $xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(x)f'(x)=\frac{1}{2x}$, άρα

$g'(x)=2\frac{1}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}.\ x>1$

Είναι $g(e)=f^2(e)-\ln e=1-1=0\Leftrightarrow c=0$, άρα για κάθε x > 1 είναι $g(x)=0\Leftrightarrow f^2(x)-\ln x=0\Leftrightarrow$ $f^2(x)=\ln x\Leftrightarrow|f(x)|=\sqrt{\ln x}$.

Για κάθε x > 1 είναι $xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)\neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(e)=1>0$, οπότε για κάθε x > 1 είναι $f(x)>0$, άρα $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

β) Η ευθεία AB έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\frac{1-0}{e+e}=\frac{1}{2e}$.

Η ευθεία AB εφάπτεται της C_f στο B αν και μόνο αν $f'(e)=\lambda_{AB}=\frac{1}{2e}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}(\ln x)'=\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

Είναι $f'(e)=\frac{1}{2e\sqrt{\ln e}}=\frac{1}{2e}$, άρα η ευθεία AB εφάπτεται της C_f στο B.

γ) Για κάθε είναι $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

Για τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ln x,\ x>1$, ισχύει το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα [x, x+1], οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi'(\xi)=\frac{\varphi(x+1)-\varphi(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}=\ln(x+1)-\ln x$.

Είναι $x<\xi<x+1\Leftrightarrow\frac{1}{x}>\frac{1}{\xi}>\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$.

33999. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x},\ \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

β) Αν επιπλέον ισχύει $(x+1)f'(x)\cdot\ln(x+1)=-f(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\ln(x+1),\ x>0$ είναι σταθερή.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\dfrac{\ln(x+1)}{x}\le g(x)\le \ln(x+1)+\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, οπότε είναι και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

β) i. Για κάθε x > 0 είναι $g'(x)=f'(x)\ln(x+1)+f(x)\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow$

$$g'(x)=\frac{(x+1)f'(x)\cdot\ln(x+1)+f(x)}{(x+1)^2}=\frac{-f(x)+f(x)}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}.$$

ii. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $\ln(x+1)>0$, οπότε η σχέση

$\frac{1}{x}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x}$ γίνεται: $\ln(x+1)\cdot\frac{1}{x}\le\ln(x+1)\cdot f(x)\le\ln(x+1)\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow$

$\frac{\ln(x+1)}{x}\le g(x)\le\ln(x+1)+\frac{\ln(x+1)}{x}$.

Έστω $h(x)=\ln(x+1),\ x>-1$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=\frac{1}{x+1}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x+1)+\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=1$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0^+} c=1\Leftrightarrow c=1$, άρα για κάθε x > 0 είναι

$$g(x)=f(x)\cdot\ln(x+1)\Leftrightarrow f(x)\cdot\ln(x+1)=1\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{\ln(x+1)}$$

Μονοτονία συνάρτησης

Θέμα 2ο

23937. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο της $A(1,f(1))$.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3x^2+1>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=4x-4\Leftrightarrow y=4x-3$.

25764. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & x\ge 0\\ x^3 & ,x<0\end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+1)=0=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} x^3=0$.
Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=f(0)$ η f είναι συνεχής στο $x_o=0$.

β) Για κάθε x < 0 είναι $f'(x)=3x^2>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή η f είναι συνεχής στο $x_o=0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

27082. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^3-3x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2,+\infty)$ είναι το διάστημα $[-5,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με
$f'(x)=3(x-1)^2-3=3(x^2-2x+1-1)=3x(x-2)$.

Είναι $f'(x)\ge0\Leftrightarrow 3x(x-2)\ge0\Leftrightarrow x\le0$ ή $x\ge2$.

Για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[2,+\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από αυτά. Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής στο [0, 2], οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Είναι $f(2)=(2-1)^3-6=-5$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)^3-3x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+3x-1-3x\right)=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f([2,+\infty))=\left[f(2),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-5,+\infty)$.

γ) Επειδή το 0 περιέχεται στο $f([2,+\infty))=[-5,+\infty)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

29211.Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $x<0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) i. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”.
ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

Για κάθε x < 0 είναι $f'(x)<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(-\infty,0)$ έχει σύνολο τιμών το

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to0^-}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,1)$.

γ) i. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1.

ii. Για κάθε x<0 και y<1 είναι $f(x)=y\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x^2}=y\Leftrightarrow\dfrac{1}{x^2}=1-y\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{1-y}\Leftrightarrow$

$|x|=\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}\overset{x<0}{\Leftrightarrow}-x=\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}\Leftrightarrow x=-\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}$, άρα

$f^{-1}(y)=-\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}$, $y<1$, οπότε $f^{-1}(x)=-\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}$, $x<1$.

33633.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+3x+2$, $x>0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.
β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x)+2023=0$ έχει θετική λύση.

Λύση

α) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)=\dfrac{1}{x}+3>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) i.Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x+3x+2)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x+3x+2)=+\infty$.
Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ii. $f(x)+2023=0\Leftrightarrow f(x)=-2023$
Επειδή ο αριθμός – 2023 περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, η εξίσωση $f(x)=-2023\Leftrightarrow f(x)+2023=0$ έχει ακριβώς μία θετική λύση.

Θέμα 4ο

23375.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x+f(x))>x,\ x\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{-\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}\sqrt{x^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)<0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right]=+\infty$$

άρα θέτοντας $\sqrt{x^2+1}-x=u$, είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0$ άρα θέτοντας $\sqrt{x^2+1}-x=u$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, οπότε η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

γ) $f^{-1}(x+f(x))>x\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(f^{-1}(x+f(x))\right)<f(x)\Leftrightarrow x+f(x)<f(x)\Leftrightarrow x<0$.

23376.Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$. Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. η συνάρτηση h είναι περιττή.

ii. η συνάρτηση h είναι “1-1”.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0,\ x>0$.

Λύση

α) Επειδή η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, είναι $f(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$. Είναι $A_h=\{x\in A_f\ /\ f(x)\in A_g\}=\{x\in\mathbb{R}\ /\ f(x)>0\}=\mathbb{R}$ και $h(x)=g(f(x))=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

β) i. Για κάθε $x\in A_h=\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$ και $h(-x)=-h(x)\Leftrightarrow\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\Leftrightarrow$
$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0\Leftrightarrow\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=0\Leftrightarrow$
$\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2\right]=0\Leftrightarrow\ln\left(x^2+1-x^2\right)=0\Leftrightarrow\ln1=0$ ισχύει. Άρα η h είναι περιττή.

ii. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)'}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{-\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}}{\sqrt{x^2+1}\cancel{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $h'(x)<0$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι 1-1.

$h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow h(x-1)=-h\left(\ln\frac{1}{x}\right)\overset{h\ \text{περιττή}}{\Leftrightarrow}h(x-1)=h\left(-\ln\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow h(x-1)=h(-\ln1+\ln x)\Leftrightarrow$
$h(x-1)=h(\ln x)\overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow}x-1=\ln x\Leftrightarrow x=1$ αφού για κάθε x > 0 είναι $\ln x\le x-1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1.

26605.Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$f^2(x)-5=x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(2)=3.$$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. $f(x)=\sqrt{x^2+5}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=x^2-\text{συν}x$, με $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

ii. Η εξίσωση $f^2(x)=5+\text{συν}x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-\pi,\pi)$.

Λύση

α) i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^2(x)-5=x^2\Leftrightarrow f^2(x)=x^2+5>0\Leftrightarrow f^2(x)\neq0\Leftrightarrow f(x)\neq0$.

ii. Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f(2)=3>0$ είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $f^2(x)=x^2+5\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+5}$.

β) i. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $g'(x)=2x+\eta\mu x$ και $g''(x)=2+\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1$, άρα $g''(x)>0$ και g΄γνησίως αύξουσα.

Για κάθε x < 0 είναι $g'(x)<g'(0)=0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε x > 0 είναι $g'(x)>g'(0)=0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g΄΄	+		
g΄	−	0	+
g	↘		↗

ii. $f^2(x)=5+\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x^2+5=5+\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x^2-\sigma\upsilon\nu x=0$.

Είναι $g(-\pi)=\pi^2+1>0$, $g(0)=-1<0$ και $g(\pi)=\pi^2-1>0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στα διαστήματα [-π, 0], [0, π] και $g(-\pi)g(0)<0,\ g(\pi)g(0)<0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1\in(-\pi,0)$ και $x_2\in(0,\pi)$ τέτοια, ώστε $g(x_1)=0,\ g(x_2)=0$.

Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$, τα x_1,x_2 είναι οι μοναδικές της ρίζες.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και $g(-x)=(-x)^2-\sigma\upsilon\nu(-x)=x^2-\sigma\upsilon\nu x=g(x)$, δηλαδή η g είναι άρτια. Είναι $g(-x_1)=g(x_1)=0$, οπότε ρίζα της g είναι και η $-x_1\in(0,\pi)$. Όμως το x_2 είναι η μοναδική ρίζα της g στο διάστημα αυτό, άρα $x_2=-x_1$.

27319. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(x-2)e^x+(x-1)\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα (1,2).

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f ΄και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια.

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον x’x στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα x’x σε δύο ακριβώς σημεία.

Λύση

α) Είναι $f(1)=-e<0$, $f(2)=\ln 2>0$.

Επειδή $f(1)f(2)<0$ και η f είναι συνεχής στο [1, 2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=e^x+(x-2)e^x+\ln x+\frac{x-1}{x}=e^x(x-1)+\ln x+\frac{x-1}{x}$..

Για κάθε x > 1 είναι $e^x(x-1)>0,\ \ln x>0,\ \frac{x-1}{x}>0$, οπότε $f'(x)>0$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $e^x(x-1)<0,\ \ln x<0,\ \frac{x-1}{x}<0$, οπότε $f'(x)<0$.

Επειδή $f'(1)=0$ η $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το x = 1 και στο σημείο αυτό η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Επειδή για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής στο $(0,1]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(x-2)e^x+(x-1)\ln x\right]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-2)e^x=-2$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)\ln x=+\infty$.

Στο διάστημα $\Delta=(0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta)=[-e,+\infty)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f(\Delta)$, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ.

Επειδή $x_0\in(1,+\infty)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο $(1,+\infty)$. Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

27455. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}-1, & x<2\\ e^{x-2}-2, & x\geq 2\end{cases}$ και $g:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-3$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x\neq 2$.

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:

«Αν $f(x)>g(x)$ κοντά στο x_0, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) i. Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(e^{x-2}-2\right)=-1=f(0)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ επομένως η f είναι συνεχής στο x = 2.

Για κάθε x < 2 είναι $f(x)=-1$ και είναι σταθερή.

Για κάθε x > 2 είναι $f'(x)=e^{x-2}>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\geq 2$ είναι $f(x)\geq f(2)\Leftrightarrow f(x)\geq -1$. Επειδή για κάθε x < 2 είναι $f(x)=-1$, είναι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=-x+2$.

Για κάθε x < 2 είναι $g'(x)>0$ και για κάθε x > 2 είναι $g'(x)<0$, επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-3\right)=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-3\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=-\infty$

Στο διάστημα $(-\infty,2]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g((-\infty,2])=\left(\lim\limits_{x\to -\infty} g(x),g(2)\right]=(-\infty,-1]$. Στο διάστημα $[2,+\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g([2,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to +\infty} g(x),g(2)\right]=(-\infty,-1]$.

Η g έχει σύνολο τιμών το $g(\mathbb{R})=(-\infty,-1]$.

β) Από το σύνολο τιμών της g προκύπτει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\leq -1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 2. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq -1$, ισχύει ότι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\neq 2$.

γ) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής γιατί ενώ κοντά στο 2 είναι $f(x) > g(x)$ και $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = -1$.

31793. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$ και $g(x) = \ln(\ln x)$, $x > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$.

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $T(e, g(e))$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της (ε).

γ) Υποθέτουμε ότι $g(x) < f(x)$ για κάθε $x > 1$. Ένα σημείο $M(x, 0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $2\ cm/sec$ πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$, $\Gamma(x, g(x))$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΒΓ τη χρονική στιγμή που το Μ βρίσκεται στη θέση $(e^2, 0)$.

Λύση

α) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$, οπότε για κάθε x > 0 είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \overset{f\nearrow \Rightarrow 1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$.

β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{\ln x}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln x}$.

Η ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_g = g'(e) = \frac{1}{e \ln e} = \frac{1}{e}$.

Η C_f δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στην ε, αν υπάρχει σημείο της $M(x_1, f(x_1))$, $x_1 > 0$ τέτοιο, ώστε

$f'(x_1) = \lambda_g \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow ex_1 + e = x_1^2 \Leftrightarrow x_1^2 - ex_1 - e = 0$.

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $x_1 = \frac{e \pm \sqrt{e^2 + 4e}}{2}$.

Είναι $e^2 < e^2 + 4e \Leftrightarrow e < \sqrt{e^2 + 4e} \Leftrightarrow e - \sqrt{e^2 + 4e} < 0$, οπότε η λύση $x_1 = \frac{e - \sqrt{e^2 + 4e}}{2}$ απορρίπτεται.

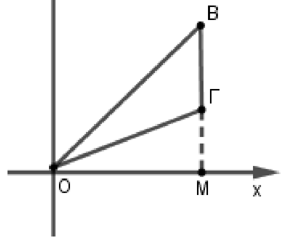
Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $x_1 = \frac{e + \sqrt{e^2 + 4e}}{2}$ είναι παράλληλη στην ε.

γ) Είναι $(O B \Gamma) = \frac{1}{2}(B\Gamma)(OM) = \frac{1}{2}\left(f(x) - g(x)\right) \cdot x$, x > 1.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ βρίσκεται στο σημείο $(e^2, 0)$, τότε $x(t_0) = e^2$ και $x'(t) = 2$, $t \geq 0$.

Είναι $f(x(t_0)) = \ln e^2 + 1 - \frac{1}{e^2} = 3 - \frac{1}{e^2}$, $g(x(t_0)) = \ln(\ln e^2) = \ln 2$,

$f'(x(t_0)) = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^4}$, $g'(x(t_0)) = \frac{1}{e^2 \ln e^2} = \frac{1}{2e^2}$



Έστω $E(t) = \frac{1}{2} x\left(f(x(t)) - g(x(t))\right)$, $x(t) > 1$. Είναι

$E'(t) = \frac{1}{2} x'(t)\left(f(x(t)) - g(x(t))\right) + \frac{1}{2} x(t)\left(f'(x(t))x'(t) - g'(x(t))x'(t)\right) \Leftrightarrow$

$E'(t) = \frac{1}{2} \cdot 2\left(f(x(t)) - g(x(t))\right) + \frac{1}{2} x(t)\left(f'(x(t)) \cdot 2 - g'(x(t)) \cdot 2\right) \Leftrightarrow$

$E'(t)=\left(f\left(x(t)\right)-g\left(x(t)\right)\right)+x(t)\left(f'\left(x(t)\right)-g'\left(x(t)\right)\right)$

Τη χρονική στιγμή t= t_0, είναι $E'(t_0)=\left(f\left(x(t_0)\right)-g\left(x(t_0)\right)\right)+x(t_0)\left(f'\left(x(t_0)\right)-g'\left(x(t_0)\right)\right)\Leftrightarrow\ldots$

$E'(t_0)=\frac{7}{2}-\ln 2\ cm^2/sec$

32524.Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\frac{e}{x}-\ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x)=x\ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+x}{e-x\ln x-ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$.

Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=-\frac{e}{x^2}-\frac{1}{x}$.

Για κάθε x > 0 είναι $g'(x)<0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Για κάθε x > 0 είναι $e(1-x)=x\ln x\Leftrightarrow e-ex=x\ln x\overset{:x}{\Leftrightarrow}$

$\frac{e}{x}-e=\ln x\Leftrightarrow\frac{e}{x}-\ln x=e\Leftrightarrow g(x)=g(1)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}x=1$

γ) i. Η f ορίζεται όταν x > 0 και $e-x\ln x-ex\neq0\overset{\beta)\text{ σκέλος}}{\Leftrightarrow}x\neq1$, άρα $D_f=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

ii. Για κάθε x > $1\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(1)$.

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2+x}{e-x\ln x-ex}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}\left(\frac{e}{x}-\ln x-e\right)}=\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x+1)\frac{1}{g(x)-g(1)}\right]=2(-\infty)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to1^+}\left(g(x)-g(1)\right)=0$ και για κάθε x > $1\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}g(x)<g(1)$.

33388.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{\pi}{2},\pi+1\right)$.

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία.

γ) Να δείξετε ότι:

i. $|f'(x)|\le3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. $|f(\beta)-f(\alpha)|\le3|\beta-\alpha|$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2+\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \le συνx \le 1$, άρα $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) i. Είναι $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + συν\frac{\pi}{2} = 2$.

Η εφαπτομένη ης C_f στο σημείο της $A\left(\frac{\pi}{2}, \pi + 1\right)$ είναι η ευθεία

ε: $y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y - \pi - 1 = 2x - \pi \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

ii. Για τα κοινά σημεία των ε, C_f έχουμε:

$\begin{cases} y = 2x + ημx \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + ημx = 2x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ημx = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κ\pi + \frac{\pi}{2}, κ \in \mathbb{Z} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2κ\pi + \frac{\pi}{2}, κ \in \mathbb{Z} \\ y = 4κ\pi + \pi + 1 \end{cases}$. Τα κοινά σημεία των ε, C_f είναι της μορφής $M\left(2κ\pi + \frac{\pi}{2}, 4κ\pi + \pi + 1\right), κ \in \mathbb{Z}$.

Είναι $f'\left(2κ\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2 + συν\left(2κ\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2 + συν\frac{\pi}{2} = 2 = \lambda_ε$, οπότε η ε εφάπτεται της C_f στα άπειρα σημεία M.

γ) i. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $|f'(x)| = |2 + συνx| \le 2 + |συνx| \le 2 + 1 = 3$.

ii. Αν α< β τότε για την f ισχύει το Θ.Μ.Τ. στο [α, β] , οπότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Είναι $|f'(\xi)| \le 3 \Leftrightarrow \left|\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\right| \le 3 \Leftrightarrow \frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \le 3 \Leftrightarrow |f(\beta) - f(\alpha)| \le 3|\beta - \alpha|$.

Ομοίως αν α > β και τέλος αν α = β ισχύει η ισότητα.

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Θέμα 2ο

23197. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

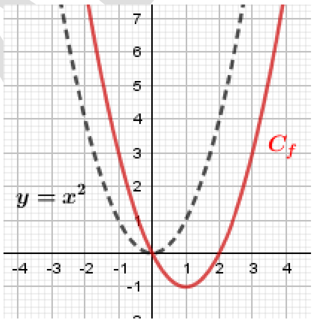
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f.

Λύση

α) Είναι $f(0)=0$ και $f(2)=0$ άρα $f(0)=f(2)$.

Επειδή $f(0)=f(2)$ η f δεν είναι 1-1 οπότε δεν αντιστρέφεται.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x-2$. Για κάθε x < 1 είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=-1$.



γ) Είναι $f(x)=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1$. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 1 μονάδα δεξιά και 1 μονάδα προς τα κάτω.

25761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x(\ln x-1)+1,\ x>0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x+1=x$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x-1+\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}=\ln x$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1\cdot(-1)+1=0$.

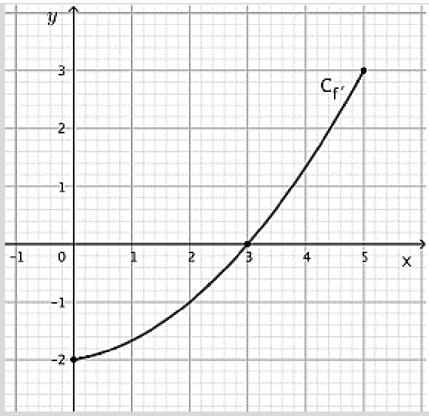
β) $x\ln x+1=x \Leftrightarrow x\ln x-x+1=0 \Leftrightarrow x(\ln x-1)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$ γιατί για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f(x)>f(1)=0$ και για κάθε x > 1 είναι $f(x)>f(1)=0$.

26707.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.

α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$;

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 3] και γνησίως αύξουσα στο [3, 5].

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_o=3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



Λύση

α) Η γραφική παράσταση της f΄τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο (3, 0), άρα για κάθε $x\in[0,5]$ είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$.

β) Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής στο [0, 3], οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(3,5)$ είναι $f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής στο [3, 5], οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

γ) Η f έχει ελάχιστο στο $x_o=3$, αφού είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 3] και γνησίως αύξουσα στο [3, 5].

32390.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x+2,\ \ x\in[0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

Λύση

α) Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του [0, 2] στ οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη και οι ρίζες της f ΄.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x)=4x^3-4$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-4=0 \Leftrightarrow 4x^3=4 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=1$. Το 1 είναι κρίσιμο σημείο της f.

β) Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής στο [0, 1], άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής στο [1, 2], άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Στο διάστημα $\Delta_1=[0,1]$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=[f(1),f(0)]=[-1,2]$ και στο διάστημα $\Delta_2=[1,2]$ η f έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=[f(1),f(2)]=[-1,10]$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,10]$, οπότε έχει ελάχιστο το -1 για x = 1 και μέγιστο το 10 για x = 2.

34025.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\ln x},\ \ x\in(1,+\infty)$.

α) i. Να δείξετε ότι $f'(x)<0$ με $x\in(1,+\infty)$.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

β)i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

Λύση

α) i.Για κάθε x > 1 είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{(\ln x)^2}(\ln x)'=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}<0$.

ii. $f'(x)<0 \Rightarrow f \searrow (1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\ln x}=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to1^+}\ln x=0$ και $\ln x>0$ για x > 1.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{\ln x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(1,+\infty)$, οπότε έχει σύνολο τιμών το

$f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to1^{=}} f(x)\right)=(0,+\infty)$.

β) i.Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

ii. Για κάθε x > 1 και y > 0 είναι $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{1}{\ln x}=y \Leftrightarrow \ln x=\dfrac{1}{y} \Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{y}}$, άρα

$f^{-1}(y)=e^{\frac{1}{y}}$, $y>0$, οπότε $f^{-1}(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x>0$.

Θέμα 4ο

23311.Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

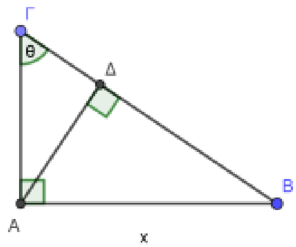
α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα.

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους υ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x=\dfrac{1}{2}$.

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0)=\dfrac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0{,}1\text{m/sec}$.

Λύση



23311.α) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^\circ$ στο οποίο AB = x, ΑΓ = y με

$E'(x)<0$ $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$.

Είναι $E(x)=(AB\Gamma)=\dfrac{1}{2}AB\cdot A\Gamma \Leftrightarrow E(x)=\dfrac{1}{2}x(1-x)=\dfrac{1}{2}(x-x^2)$.

Είναι x > 0, $y>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$, άρα $x\in(0,1)$.

Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $E'(x)=\dfrac{1}{2}(1-2x)$.

$E'(x)\ge0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(1-2x)\ge0 \Leftrightarrow 1-2x\ge0 \Leftrightarrow 1\ge2x \Leftrightarrow x\le\dfrac{1}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ είναι $E'(x)>0$ και για κάθε $x\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ είναι . Επειδή η Ε είναι συνεχής στο $(0,1)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{1}{2},1\right)$.

Η Ε έχει μέγιστο για $x=\frac{1}{2}$ το $E\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$.

β) Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $B\Gamma^2=AB^2+A\Gamma^2=x^2+(1-x)^2=x^2+1-2x+x^2 \Leftrightarrow$

$B\Gamma^2=2x^2-2x+1 \Leftrightarrow B\Gamma=\sqrt{2x^2-2x+1}$. Έστω $B\Gamma(x)=\sqrt{2x^2-2x+1},\ x\in(0,1)$.

Η συνάρτηση ΒΓ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$B\Gamma'(x)=\frac{\left(2x^2-2x+1\right)'}{2\sqrt{2x^2-2x+1}}=\frac{4x-2}{2\sqrt{2x^2-2x+1}}=\frac{\cancel{2}(2x-1)}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-2x+1}}.$$

Είναι $B\Gamma'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{2}(2x-1)}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-2x+1}}\ge 0 \Leftrightarrow 2x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\frac{1}{2}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $B\Gamma'(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $B\Gamma'(x)>0$. Επειδή η ΒΓ είναι συνεχής στο $(0,1)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{2},1\right)$.

Η υποτείνουσα ΒΓ γίνεται ελάχιστη για $x=\frac{1}{2}$ με τιμή $B\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

γ) Έστω ΑΔ= υ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου. Τότε $E=\frac{1}{2}B\Gamma\cdot\upsilon \Leftrightarrow \upsilon=\frac{2E}{B\Gamma}$.

Επειδή η Ε έχει μέγιστο το $E\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ ισχύει ότι $2E(x)\le\frac{1}{4}$ (1) και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{1}{2}$.

Επειδή η ΒΓ έχει ελάχιστο το $B\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ισχύει ότι $B\Gamma(x)\ge\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{B\Gamma(x)}\le\frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{B\Gamma(x)}\le\sqrt{2}$ (2)

και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=\frac{1}{2}$. Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι

$\frac{2E(x)}{B\Gamma(x)}\le\frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \upsilon\le\frac{\sqrt{2}}{4}$. Οπότε η μέγιστη τιμή του ύψους υ είναι $\frac{\sqrt{2}}{4}$ για $x=\frac{1}{2}$.

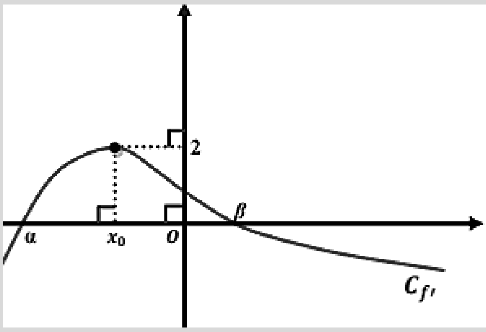
δ) Είναι $\Gamma=\theta$ και $\varepsilon\varphi\theta=\frac{A\Gamma}{AB}$, άρα $\varepsilon\varphi\theta(t)=\frac{x(t)}{1-x(t)}$.

Είναι $\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)'=\left(\frac{x(t)}{1-x(t)}\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)=\frac{x'(t)\left(1-x(t)\right)-x(t)\left(-x'(t)\right)}{\left(1-x(t)\right)^2}$ και τη χρονική στιγμή

$t=t_0$ είναι $\theta'(t_0)=\frac{x'(t_0)\left(1-x(t_0)\right)-x(t_0)\left(-x'(t_0)\right)}{\left(1-x(t_0)\right)^2}\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0) \Leftrightarrow$

$$\theta'(t_0)=\frac{0{,}1\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}(-0{,}1)}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{A\Gamma(t_0)}{B\Gamma(t_0)}\right)^2 \Leftrightarrow \theta'(t_0)=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{1}{5}\ \text{rad/sec}$$

23210.Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.



Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,
- τα α, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα x΄x η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f(x+1)-f(x)\le 2$.

Λύση

α) Για κάθε $x<\alpha$ ή $x>\beta$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty,\alpha],[\beta,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα αυτά. Για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ είναι $f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό ελάχιστο για x = α το $f(\alpha)$ και τοπικό μέγιστο για x = β το $f(\beta)$.

β) Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=[f(\alpha),+\infty)$. Επειδή $f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0$, το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_2)$, οπότε υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, x_2 στο εσωτερικό του Δ_2 τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.
Στο διάστημα $\Delta_3=[\beta,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3)=(-\infty,f(\beta)]$. Επειδή $f(\beta)>0$, το 0 βρίσκεται στο εσωτερικό του $f(\Delta_3)$, οπότε υπάρχει μοναδικό, λόγω μονοτονίας, x_3 στο εσωτερικό του Δ_3 τέτοιο, ώστε $f(x_3)=0$.
Τελικά η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες.

γ) Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[x,x+1],\ x\in\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x).$$

Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄έχει μέγιστο το 2 για $x=x_0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)\le 2$.
Επομένως και $f'(\xi)\le 2\Leftrightarrow f(x+1)-f(x)\le 2$.

23215.Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

Δίνεται επιπλέον ότι

- η συνάρτηση f' είναι συνεχής,
- $f(0)=-1$ και $f(2)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_o \in (0,2)$.

δ) Αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_o.

Λύση

α) 1ος τρόπος: Επειδή η f ΄είναι συνεχής και διάφορη του μηδέν, διατηρεί σταθερό πρόσημο, άρα η f είναι γνησίως μονότονη οπότε είναι
1-1.

2ος τρόπος: Αν η f δεν ήταν 1-1 θα υπήρχαν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε όμως θα εφαρμόζονταν το θεώρημα Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$ ή $[x_2, x_1]$, οπότε θα υπήρχε $\xi \in (x_1, x_2)$ ή (x_2, x_1) τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$ που είναι άτοπο. Άρα η f είναι 1-1.

β) Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f στο [0,2], υπάρχει $\xi_1 \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2-0} = \dfrac{1+1}{2} = 2$, άρα υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.

γ) i. Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, τότε $0 < 2 \Leftrightarrow f(0) > f(2) \Leftrightarrow -1 > 1$ άτοπο. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι $f(0)f(2) < 0$ και η f είναι συνεχής στο [0,2], οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_o \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, το x_0 είναι η μοναδική της ρίζα.

δ) Για κάθε $x < x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) < f(x_0) = 0 \Leftrightarrow -f(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(-\infty, x_0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > x_0 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) > f(x_0) = 0 \Leftrightarrow -f(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $[x_0, +\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_o.

24579.Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$.

α) i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Λύση

α) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \dfrac{2}{x} - 1 = \dfrac{2-x}{x}$.

Για κάθε x > 0 είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε x > 2 είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2\ln x - x) = -\infty$, $f(2) = 2\ln 2 - 2$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln x - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(2\frac{\ln x}{x} - 1\right)\right] = -\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = (0,2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (-\infty, 2\ln 2 - 2]$.Στο διάστημα $\Delta_1 = [2,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (-\infty, 2\ln 2 - 2]$.
Η f έχει σύνολο τιμών το $f((0,+\infty)) = f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2) = (-\infty, 2\ln 2 - 2]$

iii. Από το σύνολο τιμών της f, προκύπτει ότι παρουσιάζει μέγιστο το 2ln2-2 για x = 2.

β) Αν κ < 2ln2-2 τότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,2)$ και μοναδικό $x_2 \in (2,+\infty)$ τέτοια, ώστε $f(x_1) = f(x_2) = \kappa$, οπότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στη περίπτωση αυτή.
Αν κ = 2ln2-2 τότε επειδή για κάθε $x \in (0,2)\cup(2,+\infty)$ είναι $f(x) < 2\ln 2 - 2$, η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει ακριβώς μία λύση τη x = 2.
Τέλος αν κ > 2ln2-2, τότε το κ δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f και η εξίσωση $f(x) = \kappa$ είναι αδύνατη.

24587.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$.
Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε, είναι $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,|x_0 - \ln x_0|$.
α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, είναι $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,(x_0 - \ln x_0)$.
β) i. Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε.
ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση.
γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.

Λύση

α) Γνωρίζουμε ότι για κάθε x > 0 είναι $\ln x < x \Leftrightarrow \ln x - x < 0$, άρα
$d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,|x_0 - \ln x_0| = \sqrt{2}(\ln x_0 - x_0)$.

β) i. Έστω $d(x) = \sqrt{2}(x - \ln x),\ x > 0$.

Η d είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $d'(x) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{x-1}{x}$.

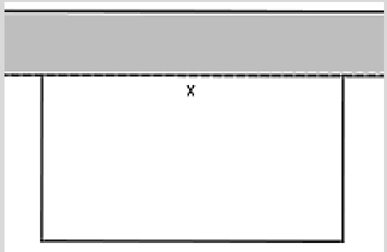
Είναι $d'(x) \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot\frac{x-1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.
Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $d'(x) < 0$ και για κάθε x > 1 είναι $d'(x) > 0$, επειδή η d είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η απόσταση d γίνεται ελάχιστη για x = 1.
Τότε $M(1,-1)$.

ii. Η ελάχιστη απόσταση είναι $d(1) = \sqrt{2}(1 - \ln 1) = \sqrt{2}$.

γ) Αρκεί να βρούμε $x_1 > 0$ για το οποίο ισχύει ότι $f'(x_1) = \lambda_\varepsilon = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} - 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x_1} = 2 \Leftrightarrow x_1 = 1$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y + 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x - 2$.

26633. Με συρματόπλεγμα μήκους 400 μέτρων, έχουμε περιφράξει μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου, από τις τρείς πλευρές της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η τέταρτη πλευρά, με μήκος x μέτρα, είναι ευθυγραμμισμένη κατά μήκος της όχθης ενός ποταμού.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής συναρτήσει του μήκους x, δίνεται από τον τύπο:

$$E(x) = 200x - \frac{1}{2}x^2 \text{ με } 0 < x < 400.$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x, για την οποία το εμβαδό $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο.

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής.

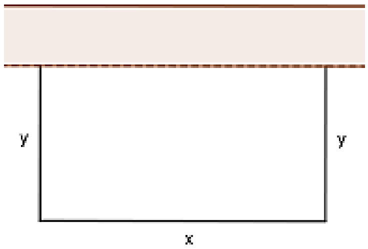
δ) Ο Ιάσωνας ισχυρίζεται ότι υπάρχει μοναδική τιμή του x, που ανήκει στο διάστημα (0, 200) για την οποία το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής, ισούται με 300·π τετραγωνικά μέτρα. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του Ιάσωνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

α) Έστω y η άλλη διάσταση της ορθογώνιας περιοχής που έχουμε περιφράξει, τότε x > 0, y > 0 και $x + 2y = 400 \Leftrightarrow 2y = 400 - x \Leftrightarrow$

$y = \frac{400-x}{2}$. Είναι $y > 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{400-x}{2} > 0 \Leftrightarrow 400 - x > 0 \Leftrightarrow x < 400$,

άρα $0 < x < 400$. Το εμβαδό της ορθογώνιας περιοχής είναι:



$E = x \cdot y = x\frac{400-x}{2} = x\left(200 - \frac{1}{2}x\right) = 200x - \frac{1}{2}x^2$, άρα

$E(x) = 200x - \frac{1}{2}x^2$ με $0 < x < 400$.

β) Για κάθε $x \in (0,400)$ είναι $E'(x) = 200 - x$.

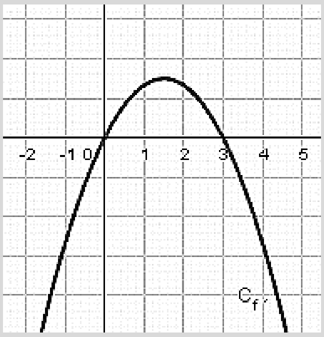
$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 200 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 200$. Για κάθε $x \in (0,200)$ είναι $E'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (200,400)$ είναι $E'(x) < 0$, επειδή η E είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,200]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[200,400)$. Η E έχει μέγιστο για $x = 200m$.

γ) $E(200) = 200 \cdot 200 - \frac{1}{2}200^2 = \frac{1}{2}200^2 = 20.000m^2$

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(200x - \frac{1}{2}x^2\right) = 0$. Επειδή η E είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,200)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E((0,200)) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} E(x), \lim\limits_{x\to 200^-} E(x)\right) = (0, 20.000)$.

Επειδή το 300π περιέχεται στο $(0, 20.000)$ και η E είναι γνησίως αύξουσα στο (0,200), υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,200)$ τέτοιο, ώστε $E(x_0) = 300\pi$, επομένως ο ισχυρισμός του Ιάσωνα είναι αληθής.

27092. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας πολυωνυμικής συνάρτησηςf τρίτου βαθμού.



α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(3,2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f.

γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f.

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$, στο διάστημα $(0,3)$.

Λύση

α) Για κάθε x < 0 ή x > 3 είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $[3,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

β) Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=-1$ και τοπικό μέγιστο το $f(3)=2$.

γ) Αφού η f είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού, η f ΄είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού.
Έστω $f'(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$. Στο σχήμα βλέπουμε ότι:
$f'(0)=0\Leftrightarrow \gamma=0$, $f'(3)=0\Leftrightarrow 9\alpha+3\beta=0\Leftrightarrow 3\beta=-9\alpha\Leftrightarrow \beta=-3\alpha$.
Άρα η f ΄είναι της μορφής

$$f'(x)=\alpha x^2-3\alpha x,\ x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f'(x)=\left(\frac{\alpha x^3}{3}-\frac{3\alpha x^2}{2}\right)'\Leftrightarrow f(x)=\frac{\alpha x^3}{3}-\frac{3\alpha x^2}{2}+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Είναι $f(0)=-1\Leftrightarrow c=-1$ και $f(3)=2\Leftrightarrow \dfrac{\alpha\cdot 3^3}{3}-\dfrac{3\alpha\cdot 3^2}{2}-1=2\Leftrightarrow 9\alpha-\dfrac{27\alpha}{2}=3\Leftrightarrow 18\alpha-27\alpha=6\Leftrightarrow$

$-9\alpha=6\Leftrightarrow \alpha=-\dfrac{2}{3}$. Τότε $f(x)=\dfrac{-\frac{2}{3}x^3}{3}-\dfrac{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^2}{2}-1=-\dfrac{2x^3}{9}+x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

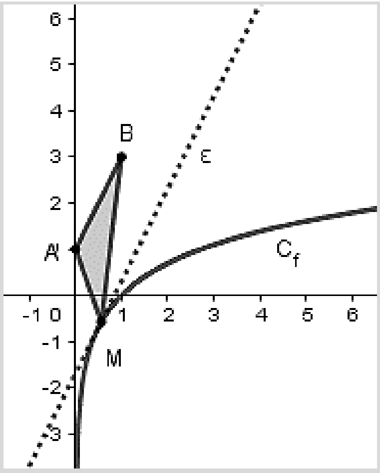
δ) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-1$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=2$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta=(0,3)$, έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta)=(-1,2)$.

Αν $\alpha\in(-1,2)$, τότε υπάρχει, λόγω μονοτονίας μοναδικό $x_0\in(0,3)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\alpha$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση στη περίπτωση αυτή.

Αν $\alpha\in(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$ τότε το α δεν περιέχεται στο $f(\Delta)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη στο (0, 3).

27650. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x,\ x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.



α) i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0.

β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - \ln x),\ x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM, όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A.

Λύση

α) Έστω $M_0(x_0, \ln x_0),\ x_0 > 0$. Η εφαπτομένη της C_f στο M_0 είναι παράλληλη στην ευθεία AB όταν

$f'(x_0) = \lambda_{AB} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{3-1}{1-0} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} = 2 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$. Τότε $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, οπότε η ζητούμενη εφαπτομένη είναι η ευθεία ε: $y - f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y + \ln 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1 - \ln 2$.

β) Έστω $M(x,y)$ με $y = \ln x$, x >0.Είναι $\overrightarrow{AB} = (1-0, 3-1) = (1,2)$, $\overrightarrow{AM} = (x, \ln x - 1)$,

$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & \ln x - 1 \end{vmatrix} = \ln x - 1 - 2x$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $(ABM) = E(x) = \frac{1}{2}|\ln x - 1 - 2x|,\ x > 0$.

Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε x > 0 είναι $f(x) \le 2x - 1 - \ln 2 < 2x + 1 \Rightarrow \ln x < 2x + 1 \Leftrightarrow \ln x - 2x - 1 < 0$, οπότε

$E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - \ln x),\ x > 0$.

γ) Το τρίγωνο ABM είναι ορθογώνιο στο A όταν

$\lambda_{AM}\lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \frac{\ln x - 1}{x} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow 2\ln x - 2 = -x \Leftrightarrow 2\ln x + x - 2 = 0$.

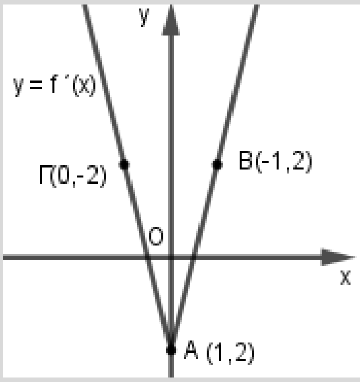
Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $2\ln x_1 + x_1 - 2 = 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2\ln x + x - 2,\ x \in [1,2]$.

Είναι $h(1) = -1,\ h(2) = 2\ln 2$, δηλαδή $h(1)h(2) < 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο [1,2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow$ $2\ln x_1 + x_1 - 2 = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $h'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο [1,2], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε το x_1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $2\ln x + x - 2 = 0$ στο διάστημα $(1,2)$.

28337. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση.
Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f ΄, είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.
Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο $A(0,-2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο $B(1,2)$ και η άλλη από το $\Gamma(-1,2)$.



α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$.
β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f.
δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Delta(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΔ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f.

Λύση

α) Η ημιευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{2+2}{-1-0}=-4$ και εξίσωση $y+2=-4x \Leftrightarrow y=-4x-2$.

Η ημιευθεία ΑΒ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AB}=\dfrac{2+2}{1-0}=4$ και εξίσωση $y+2=4x \Leftrightarrow y=4x-2$,

οπότε $f'(x)=\begin{cases}-4x-2, & x<0\\ 4x-2, & x\ge 0\end{cases}$.

Για x < 0 είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow -4x-2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ και για x > 0 είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Η C τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$ και $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

β) Για κάθε $x<-\dfrac{1}{2}$ ή $x>\dfrac{1}{2}$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$, $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

γ) Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ και τοπικό ελάχιστο το $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

δ) Η ευθεία ΑΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{A\Delta}=\dfrac{0+2}{1-0}=2$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της f στο Δ είναι το $f'(1)=4\cdot 1-2=2$.

Επειδή $f'(1)=\lambda_{A\Delta}$, η ΑΔ εφάπτεται της C_f στο Δ.

28338. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2)=-32$. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της παραγώγου f ΄τέμνονται στο σημείο $A(-2,0)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία με τετμημένες:

i. $x_1=2$, **ii.** $x_2=-2$.

β) Δίνεται επιπλέον ότι η f ΄ είναι πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού και η γραφική παράσταση της f ΄διέρχεται από το σημείο $B(0,-12)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x)=3x^2-12$,

ii. $f(x)=x^3-12x-16$,

iii. η εξίσωση $f(x)=-20$ έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Λύση

α) i. Επειδή η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=2$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(2)=0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_1=2$ έχει εξίσωση $y=f(2)\Leftrightarrow y=-32$.

ii. Επειδή η γραφική παράσταση της f ΄διέρχεται από το A, είναι $f'(-2)=0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_2=-2$ έχει εξίσωση $y=f(-2)\Leftrightarrow y=0$.

β)i. Επειδή η f ΄είναι πολυωνυμική συνάρτηση $2^{ου}$ βαθμού θα είναι της μορφής $f'(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0,\ x\in\mathbb{R}$. Επειδή η f΄ διέρχεται από το σημείο B, είναι $f'(0)=-12\Leftrightarrow\gamma=-12$.

Είναι $f'(-2)=0\Leftrightarrow 4\alpha-2\beta-12=0\Leftrightarrow 2\alpha-6=\beta$ (1)

Είναι $f'(2)=0\Leftrightarrow 4\alpha+2\beta-12=0\Leftrightarrow\beta=-2\alpha+6$ (2)

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $2\alpha-6=-2\alpha+6\Leftrightarrow 4\alpha=12\Leftrightarrow\alpha=3$, τότε από την (1) προκύπτει ότι β = 0.

Άρα $f'(x)=3x^2-12$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3x^2-12\Leftrightarrow f'(x)=\left(x^3-12x\right)'\Leftrightarrow f(x)=x^3-12x+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(2)=-32\Leftrightarrow 8-24+c=-32\Leftrightarrow c=-16$, άρα $f(x)=x^3-12x-16$, $x\in\mathbb{R}$

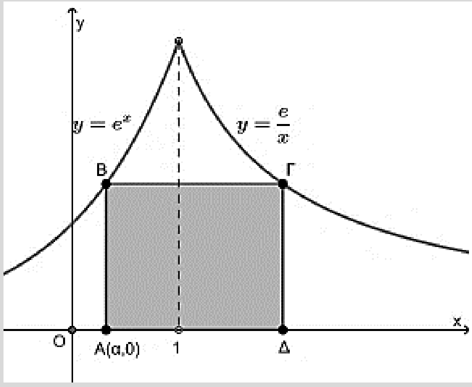
iii. $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 3x^2-12\geq 0\Leftrightarrow 3x^2\geq 12\Leftrightarrow x^2\geq 4\Leftrightarrow |x|\geq 2\Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq 2$.

Για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(-2,2)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$, $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2,2]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, $f(2)=-32$ και $f(-2)=0$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(-\infty,0]$. Επειδή το – 20 περιέχεται στο $f(\Delta_1)$, η εξίσωση $f(x)=-20$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1. Στο διάστημα $\Delta_2=(-2,2)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=(-32,0)$. Επειδή το – 20 περιέχεται στο $f(\Delta_2)$, η εξίσωση $f(x)=-20$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2. Στο διάστημα $\Delta_3=[2,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3)=[-32,+\infty)$. Επειδή το – 20 περιέχεται στο $f(\Delta_3)$, η εξίσωση $f(x)=-20$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_3. Τελικά η εξίσωση $f(x)=-20$ έχει τρείς διαφορετικές λύσεις.

28342. Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα x'x και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x, x<1$ και $g(x)=\frac{e}{x}$, $x>1$, αντίστοιχα. Έστω $A(\alpha,0)$ με $\alpha<1$.



α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta=e^{1-\alpha}$,

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι

$$E(\alpha)=e-\alpha e^{\alpha},\ \alpha<1.$$

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ .

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α, για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1.

Λύση

α) i. Το σημείο Β έχει τεταγμένη $y_B=e^{\alpha}$. Επειδή το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, είναι ΒΓ//ΑΔ, άρα $y_\Gamma=y_B \Leftrightarrow e^{\alpha}=\frac{e}{x_\Gamma}\Leftrightarrow x_\Gamma=\frac{e}{e^{\alpha}}=e^{1-\alpha}$. Επειδή $x_\Gamma=x_\Delta$, είναι $x_\Delta=e^{1-\alpha}$.

ii. Είναι $(A\Delta)=x_\Delta-x_A=e^{1-\alpha}-\alpha$ και $(AB)=y_B=e^{\alpha}$.

Είναι $E(\alpha)=(A\Delta)(AB)=\left(e^{1-\alpha}-\alpha\right)e^{\alpha}=e-\alpha e^{\alpha}$, $\alpha<1$.

β) Η συνάρτηση Ε(α) είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ με $E'(\alpha)=-e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}=-e^{\alpha}(\alpha+1)$.

$E'(\alpha)\ge 0\Leftrightarrow -e^{\alpha}(\alpha+1)\ge 0\Leftrightarrow \alpha+1\le 0\Leftrightarrow \alpha\le -1$.

Για κάθε $\alpha\in(-\infty,-1)$ είναι $E'(\alpha)>0$ και για κάθε $\alpha\in(-1,1)$ είναι $E'(\alpha)<0$, επειδή η Ε είναι συνεχής στο -1, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1)$. Η Ε έχει μέγιστο το $E(-1)=e+e^{-1}=e+\frac{1}{e}$.

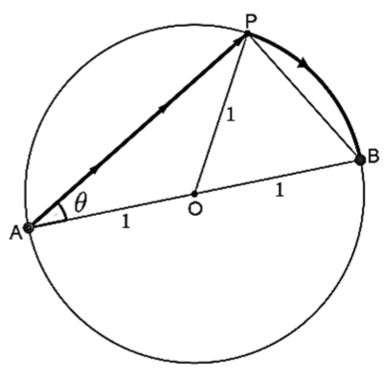
γ) Είναι $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}E(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\left(e-\alpha e^{\alpha}\right)=e$ γιατί $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\alpha e^{\alpha}=\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{\alpha}{e^{-\alpha}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{\alpha\to-\infty}\frac{1}{-e^{-\alpha}}=0$ και

$\lim\limits_{\alpha\to1^-}E(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to1^-}\left(e-\alpha e^{\alpha}\right)=0$.

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-1]$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_1)=\left(e,e+\frac{1}{e}\right]$. Το 1 δεν ανήκει στο $E(\Delta_1)$, οπότε δεν υπάρχει $\alpha\in\Delta_1$ τέτοιο ώστε Ε(α) = 1.

Η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2=(-1,1)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(\Delta_2)=\left(0,e+\frac{1}{e}\right)$. Το 1 περιέχεται στο $E(\Delta_2)$ και η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2, οπότε υπάρχει μοναδικός $\alpha\in\Delta_2$ τέτοιος ώστε Ε(α) = 1.

Επομένως υπάρχει ακριβώς μία τιμή του α για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1.



28532.Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο Α μια κυκλικής λίμνης ακτίνας $1\ \text{Km}$ και θέλει να φτάσει στο σημείο Β της λίμνης ώστε η ΑΒ να είναι διάμετρος του κύκλου.
Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων:
να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΡ έχοντας ταχύτητα $3\ \text{Km/h}$ και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου ΡΒ με ταχύτητα $6\ \text{Km/h}$.

Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $P\hat{A}B$ είναι θ rad.

α) Να αποδείξετε ότι $(AP)=2\sigma\upsilon\nu\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το Α στο Β είναι $f(\theta)=\frac{1}{3}(2\sigma\upsilon\nu\theta+\theta)$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος.

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$.

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία x rad σε κύκλο ακτίνας R, είναι $S=x\cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) x (ταχύτητα).

Λύση

α) Η γωνία $P\hat{A}B$ είναι ορθή γιατί είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΡΑΒ είναι $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{(AP)}{(AB)}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{(AP)}{2}\Leftrightarrow(AP)=2\sigma\upsilon\nu\theta$.

Έστω t_1 ο χρόνος που θα κάνει ο άνδρας την απόσταση ΑΡ, τότε $(AP)=3t_1\Leftrightarrow t_1=\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{3}$.

Επειδή η γωνία $P\hat{A}B$ είναι εγγεγραμμένη στο τόξο PB, το τόξο αυτό είναι 2θ rad και έχει μήκος $\ell_{PB}=2\theta\cdot1=2\theta$. Όμως κινείται κατά μήκος του τόξου ΡΒ με ταχύτητα $6\ \text{Km/h}$ και έστω t_2 ο χρόνος που κάνει ο άνδρας να διανύσει αυτό το τόξο. Είναι $\ell_{PB}=6t_2\Leftrightarrow t_2=\frac{2\theta}{6}=\frac{\theta}{3}$.

Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται ο άνδρας είναι $f(\theta)=t_1+t_2=\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{3}+\frac{\theta}{3}=\frac{1}{3}(2\sigma\upsilon\nu\theta+\theta)$ με $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(\theta)=\frac{1}{3}(-2\eta\mu\theta+1)$.

Είναι $f'(\theta)\ge0\Leftrightarrow\frac{1}{3}(-2\eta\mu\theta+1)\ge0\Leftrightarrow-2\eta\mu\theta+1\ge0\Leftrightarrow$

$-2\eta\mu\theta\ge-1\Leftrightarrow\eta\mu\theta\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\eta\mu\theta\le\eta\mu\frac{\pi}{6}\overset{\eta\mu\theta\nearrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}0<\theta\le\frac{\pi}{6}$.

Για κάθε $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ είναι $f'(\theta)>0$ και για κάθε $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f'(\theta)<0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$.

Η f έχει μέγιστο για $\theta=\frac{\pi}{6}$.

γ) Είναι $\lim\limits_{\theta\to 0^+} f(\theta)=\lim\limits_{\theta\to 0^+}\frac{1}{3}(2\sigma\upsilon\nu\theta+\theta)=\frac{2}{3}$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}$ και

$\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-} f(\theta)=\lim\limits_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{3}(2\sigma\upsilon\nu\theta+\theta)=\frac{1}{3}\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$.

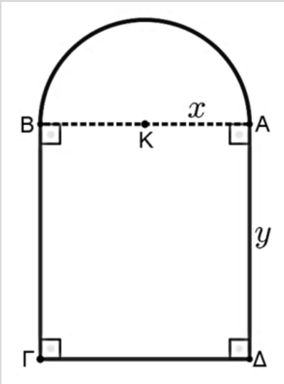
Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(\Delta_1)=\left(\frac{2}{3},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(\Delta_2)=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$. Η f έχει σύνολο τιμών το $f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$.

28534. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα.
Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με 4m, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(\mathrm{AK})=x\,\mathrm{m}$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(\mathrm{A\Delta})=y\,\mathrm{m}$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y=-\frac{\pi+2}{2}\cdot x+2$ και $E(x)=-\frac{\pi+4}{2}\cdot x^2+4x$, με $x\in\left(0,\frac{4}{\pi+2}\right)$.

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου.

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(E(x))}{E(x)-E(x_0)}$.

Λύση

α) Η περίμετρος του ημικυκλίου είναι πx και η συνολική περίμετρος είναι:

$\mathrm{B\Gamma}+\Gamma\Delta+\mathrm{A\Delta}+\pi x=2y+2x+\pi x$, άρα $2y+2x+\pi x=4\Leftrightarrow 2y=4-(\pi+2)x\Leftrightarrow y=-\frac{\pi+2}{2}\cdot x+2$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου μέρους είναι $(\mathrm{AB\Gamma\Delta})=y\cdot 2x=\left(-\frac{\pi+2}{2}\cdot x+2\right)2x=4x-(\pi+2)x^2$ και το εμβαδό του ημικυκλικού χωρίου είναι $\frac{\pi x^2}{2}$, οπότε το συνολικό εμβαδό είναι

$E(x)=4x-(\pi+2)x^2+\frac{\pi x^2}{2}=4x-\left(\pi+2-\frac{\pi}{2}\right)x^2=-\frac{\pi+4}{2}\cdot x^2+4x$.

Είναι $x > 0$ και $y > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi+2}{2}\cdot x + 2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi+2}{2}\cdot x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{4}{\pi+2}$, άρα $x \in \left(0,\ \frac{4}{\pi+2}\right)$.

β) Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\ \frac{4}{\pi+2}\right)$ με $E'(x) = -(\pi+4)x + 4$.

Είναι $E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -(\pi+4)x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{\pi+4}$.

Για κάθε $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+4}\right)$ είναι $E'(x) > 0$ και για κάθε $x \in \left(\frac{4}{\pi+4}, \frac{4}{\pi+2}\right)$είναι $E'(x) < 0$, επειδή η Ε είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{4}{\pi+4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{4}{\pi+4}, \frac{4}{\pi+2}\right)$.

Η Ε παρουσιάζει μέγιστο για $x = \frac{4}{\pi+4}$ το $E\left(\frac{4}{\pi+4}\right) = -\frac{\pi+4}{2}\cdot\left(\frac{4}{\pi+4}\right)^2 + 4\cdot\frac{4}{\pi+4} = \frac{8}{\pi+4}$.

γ) Επειδή η Ε έχει μέγιστο για $x = x_0$ ισχύει ότι $E(x) \leq E(x_0)$ για κάθε $x \in \left(0,\ \frac{4}{\pi+2}\right)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0 = \frac{4}{\pi+4}$. Επομένως $E(x) < E(x_0) \Leftrightarrow E(x) - E(x_0) < 0$ για τιμές του x κοντά στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{E(x) - E(x_0)} = -\infty$. Ακόμη $E(x_0) = \frac{4}{\pi+4} > 1 \Leftrightarrow \ln E(x_0) > \ln 1 = 0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to x_0} \ln(E(x)) = \ln(E(x_0)) > 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln(E(x))}{E(x) - E(x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0}\left[\ln(E(x))\frac{1}{E(x) - E(x_0)}\right] = -\infty$.

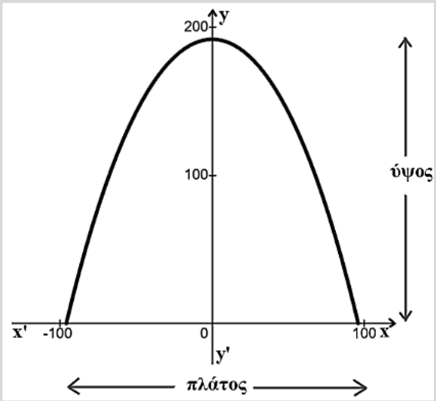
29149.Δίνεται η συνάρτηση $g: [-96, 96] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{\frac{x}{96}} + e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν $\alpha > 0$ και $f(x) = 2\alpha\left[g(96) - g(x)\right]$, $x \in [-96, 96]$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (-96, 96)$.

ii. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της.



Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(-96, 96)$ με $g'(x) = \frac{1}{96}e^{\frac{x}{96}} - \frac{1}{96}e^{-\frac{x}{96}} = \frac{1}{96}\left(e^{\frac{x}{96}} - e^{-\frac{x}{96}}\right)$.

Είναι $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{96}\left(e^{\frac{x}{96}} - e^{-\frac{x}{96}}\right) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{96}} - e^{-\frac{x}{96}} \geq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{96}} \geq e^{-\frac{x}{96}} \Leftrightarrow \frac{x}{96} \geq -\frac{x}{96} \Leftrightarrow 2\frac{x}{96} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Για κάθε $x \in (-96, 0)$ είναι $g'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (0, 96)$ είναι $g'(x) > 0$, επειδή η g είναι συνεχής στο $[-96, 96]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-96, 0]$και γνησίως αύξουσα στο $[0, 96]$.

Η g έχει ελάχιστο το $g(0) = 2$, τοπικό μέγιστο το $g(-96) = e^{-1} + e$, τοπικό μέγιστο το $g(96) = e\ \ + e^{-1}$, οπότε έχει μέγιστο το $e\ \ + e^{-1}$.

β) i. Επειδή η g έχει μέγιστο για x = 96, είναι $g(x)\le g(96)\Leftrightarrow g(96)-g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[-96,96]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 96 και x = - 96. Επειδή $\alpha>0$ είναι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-96,96)$.

ii. Για κάθε $x\in(-96,96)$, είναι $f'(x)=2\alpha g'(x)$.

Για κάθε $x\in(-96,0)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(0,96)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $[-96,96]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[-96,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,96]$. Η f έχει μέγιστο το $f(0)=2\alpha\left[g(96)-g(0)\right]=2\alpha\left(e\ +e^{-1}-2\right)$.

Επειδή $x\in[-96,96]$, το πλάτος της αψίδας του Σεντ Λούις είναι ίσο με $96-(-96)=192$.

Επειδή η αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της, είναι $2\alpha\left(e\ +e^{-1}-2\right)=192\Leftrightarrow\alpha=\dfrac{96}{e\ +e^{-1}-2}$.

29644. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [-3,2] η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία A και B.

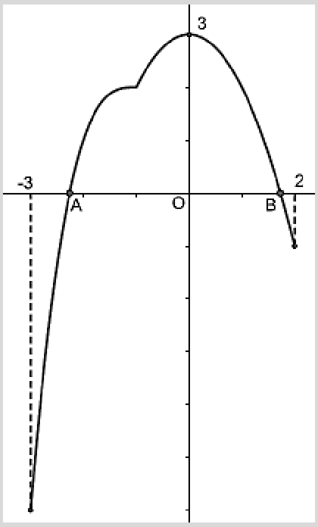
Έστω g η συνάρτηση με $g(x)=f(x)+x$, $x\in[-3,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [-3,2].

ii. Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y=x+3$.



Λύση

α) i. Η g είναι συνεχής στο [- 3, 2] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

ii. Είναι $g(-3)=f(-3)-3<0$ και $g(2)=f(2)+2>0$, άρα $g(-3)g(2)<0$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο [-3, 2], σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (-3, 2).

β) Επειδή η f παρουσιάζει μέγιστο στο x = 0 το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του (-3, 2) και είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'(0)=0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (-3, 2) ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=f'(x)+1$.

Είναι $g(0)=f(0)=3$ και $g'(0)=f'(0)+1=1$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y-g(0)=g'(0)x\Leftrightarrow y-3=x\Leftrightarrow y=x+3$.

29927. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0}f(x), \lim\limits_{x\to 1^-}f(x),\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

β) i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x=x^\alpha$ (1) με x >0. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=\alpha$ και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right)=0\cdot 0=0$ γιατί $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right)=1\cdot(-\infty)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x=0$ και $\ln x<0$ για $x\in(0,1)$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right)=1\cdot(+\infty)=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x=0$ και $\ln x>0$ για $x\in(1,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\ln x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$.

β) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$.

$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}\ge 0\Leftrightarrow\ln x\ge 1\Leftrightarrow x\ge e$.

Για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,e)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x > e είναι $f'(x)>0$.

Επειδή η f είναι συνεχής είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0,1)$, $(1,e]$ και γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(e)=\dfrac{e}{\ln e}=e$.

ii. Στο διάστημα $\Delta_1=(0,1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to 1^-}f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=(-\infty,0)$.

Στο διάστημα $\Delta_2=(1,e]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=\left[f(e),\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)\right)=[e,+\infty)$

Στο διάστημα $\Delta_3=(e,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε

έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3)=\left(f(e),\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)\right)=(e,+\infty)$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$.

γ) $e^x=x^\alpha\Leftrightarrow\ln e^x=\ln x^\alpha\Leftrightarrow x=\alpha\ln x\Leftrightarrow\dfrac{x}{\ln x}=\alpha\Leftrightarrow f(x)=\alpha$.

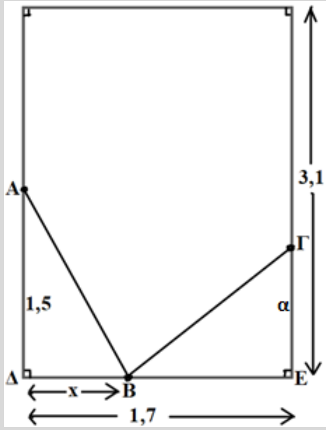
Αν α < 0 τότε το α περιέχεται μόνο στο $f(\Delta_1)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Αν $\alpha\in[0,e)$ τότε το α δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη στη περίπτωση αυτή.

Αν α = e τότε το α περιέχεται μόνο στο $f(\Delta_2)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Αν α > e τότε το α περιέχεται στα $f(\Delta_2)$, $f(\Delta_3)$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα σε καθένα από τα Δ_1, Δ_2, οπότε έχει ακριβώς 2 ρίζες στη περίπτωση αυτή.

31680. Ένα γαλλικό μπιλιάρδο έχει μήκος $3{,}1$ μέτρα και πλάτος $1{,}7$ μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο Α, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Β και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνονται τα μήκη $\Delta B = x$, $\Delta E = 1{,}7$, $A\Delta = 1{,}5$, $\Gamma E = \alpha$ και $L = AB + B\Gamma$ που εκφράζονται σε μέτρα.

α) Να αποδείξετε ότι

$$L = L(x) = \sqrt{x^2 + 2{,}25} + \sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2},\ x \in \left(0, \frac{17}{10}\right).$$

β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το Β απέχει $1{,}02$ μέτρα από το Δ.

i. Αν $L'(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2 + 2{,}25}} - \sqrt{\dfrac{(1{,}7 - x)^2}{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}}$, $x \in \left(0, \dfrac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

ii. Αν $L''(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1{,}02} \dfrac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει.

Λύση

α) Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ έχουμε:

$$AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 = 1{,}5^2 + x^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{x^2 + 2{,}25}$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΕΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = BE^2 + E\Gamma^2 = (1{,}7 - x)^2 + \alpha^2 \Leftrightarrow B\Gamma = \sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}.$$

Είναι $L = L(x) = AB + B\Gamma = \sqrt{x^2 + 2{,}25} + \sqrt{(1{,}7 - x)^2 + \alpha^2}$, $x \in \left(0, \dfrac{17}{10}\right)$.

β) i. Επειδή η συνάρτηση L παρουσιάζει ελάχιστο στο x = 1,02 που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι

$$L'(1{,}02) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1{,}02^2}{1{,}02^2 + 2{,}25}} - \sqrt{\frac{0{,}68^2}{0{,}68^2 + \alpha^2}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1{,}02^2}{1{,}02^2 + 2{,}25}} = \sqrt{\frac{0{,}68^2}{0{,}68^2 + \alpha^2}} \Leftrightarrow \frac{1{,}02^2}{1{,}02^2 + 2{,}25} = \frac{0{,}68^2}{0{,}68^2 + \alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{1{,}02^2 \cdot 0{,}68^2} + 1{,}02^2\alpha^2 = \cancel{1{,}02^2 \cdot 0{,}68^2} + 2{,}25 \cdot 0{,}68^2 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{1{,}02^2\alpha^2} = \sqrt{2{,}25 \cdot 0{,}68^2} \Leftrightarrow 1{,}02\alpha = 1{,}5 \cdot 0{,}68 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

ii. Για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{17}{10}\right)$ είναι $L''(x) > 0$, άρα η L' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1{,}02 < x < 1{,}7$ είναι $L'(x) > L'(1{,}02) = 0$, οπότε $\lim\limits_{x \to 1{,}02^+} \dfrac{1}{L'(x)} = +\infty$.

Για κάθε $0<x<1,02$ είναι $L'(x)<L'(1,02)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1,02^-}\dfrac{1}{L'(x)}=-\infty$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1,02}\dfrac{1}{L'(x)}$.

33596.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ και το σημείο $A(0,2)$. Αν $K(x,\ln x)$ με $x>0$ τυχαίο σημείο της C_f και $M(x_o,\ln x_o)$ με $x_o>0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A, να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x>0$ είναι $d(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}$.

β) $x_o^2+\ln x_o-2=0$.

γ) η εφαπτομένη της C_f στο M

i. είναι κάθετη στην AM.

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $\left(x_o^3-x_o,0\right)$.

Λύση

α) $(AK)=d(x)=\sqrt{x^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}$.

β) Το $x_o>0$ είναι η τιμή του x > 0 για την οποία η συνάρτηση d(x) παίρνει ελάχιστη τιμή. Για κάθε x > 0

είναι $d'(x)=\dfrac{\left(x^2+\ln^2 x-4\ln x+4\right)'}{2\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}}=\dfrac{2x+\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{4}{x}}{2\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}}\Leftrightarrow$

$d'(x)=\dfrac{2x^2+2\ln x-4}{2x\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}}=\dfrac{\cancel{2}\left(x^2+\ln x-2\right)}{\cancel{2}x\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}}\Leftrightarrow$

$d'(x)=\dfrac{x^2+\ln x-2}{x\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}}$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $d'(x_0)=0\Leftrightarrow\dfrac{x_o^2+\ln x_o-2}{x_0\sqrt{x_o^2+\ln^2 x_0-4\ln x_0+4}}=0\Leftrightarrow x_o^2+\ln x_o-2=0$

γ) i. Η ευθεία AM έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AM}=\dfrac{\ln x_0-2}{x_0}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο M έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$.

Είναι $\lambda_{AM}f'(x_0)=\dfrac{\ln x_0-2}{x_0}\cdot\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{\ln x_0-2}{x_o^2}$.

Όμως $x_o^2+\ln x_o-2=0\Leftrightarrow\ln x_o-2=-x_o^2$, άρα $\lambda_{AM}f'(x_0)=\dfrac{\ln x_0-2}{x_0}\cdot\dfrac{1}{x_0}=\dfrac{-x_o^2}{x_o^2}=-1$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM.

ii. Η εφαπτομένη στο M έχει εξίσωση ε: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x_0}x-1+\ln x_0$.

Η ε τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο της με y=0, άρα

$\dfrac{1}{x_0}x-1+\ln x_0=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{x_0}x=1-\ln x_0\Leftrightarrow x=x_0\left(1-\ln x_0\right)$

Όμως $x_o^2+\ln x_o-2=0\Leftrightarrow \ln x_o=2-x_o^2$, άρα

$x=x_0\left(1-2+x_o^2\right)=x_o^3-x_o$, επομένως η ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(x_o^3-x_o,0\right)$.

33642. Έστω f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)+2x=f'(x)+x^2$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x)=f(x)-x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. $f(x)=e^x+x^2,\ x\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o,\ f(x_o)),\ x_o\in(-1,\ 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει

$$e^{-1}<m<2.$$

Λύση

α) i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=f'(x)-2x=f(x)-x^2=g(x)$.

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g'(x)=g(x)\Leftrightarrow g(x)=ce^x\Leftrightarrow f(x)-x^2=ce^x\Leftrightarrow f(x)=ce^x+x^2,\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=e^x+x^2,\ x\in\mathbb{R}$.

β) i. Είναι $f'(x)=e^x+2x,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι $f'(-1)=e^{-1}-2<0,\ f'(0)=1>0$, δηλαδή $f'(-1)f'(0)<0$ και επειδή η f ′ είναι συνεχής στο $[-1,0]$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(-1,0)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$, δηλαδή υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o,\ f(x_o)),\ x_o\in(-1,\ 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

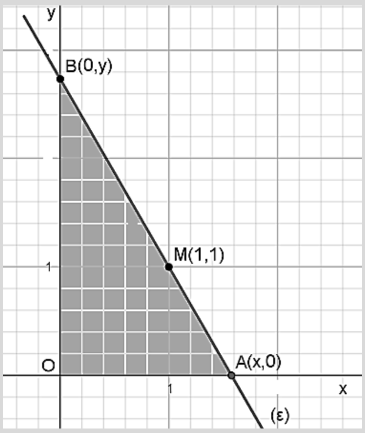
ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f''(x)=e^x+2>0$ άρα η f ′είναι γνησίως αύξουσα.

Για κάθε $x<x_0$ είναι $f'(x)<f'(x_0)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,x_0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>x_0$ είναι $f'(x)>f'(x_0)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το m= $f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2$.

Είναι $-1<x_0<0\Leftrightarrow 0<x_0^2<1\ (1)$ και $e^{-1}<e^{x_0}<1\ (2)$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) προκύπτει ότι $e^{-1}<m<2$.

34440. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το $O(0,0)$, δίνεται το σημείο $M(1,1)$.
Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Μ τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $A(x,0),\ x>0$ και $B(0,y),\ y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



α) Για $x\in(1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$.
β) Να αποδείξετε ότι για $x=2$ το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί .
γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E, στο σημείο $(3,E(3))$ και τα σημεία Γ, Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.
δ) Ένα σημείο $K(x,y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

Λύση

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}xy$ (1)
Στο σχήμα βλέπουμε ότι y > 1 και x > 1.
Επειδή τα σημεία Α, Μ, Β είναι συνευθειακά, ισχύει ότι $\lambda_{AM}=\lambda_{MB}\Leftrightarrow$

$$\frac{1-0}{1-x}=\frac{y-1}{0-1}\Leftrightarrow -1=(1-x)(y-1)\Leftrightarrow -1=y-1-xy+x\Leftrightarrow xy-y=x\Leftrightarrow y(x-1)=x\Leftrightarrow y=\frac{x}{x-1}\ (2).$$

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $E=\frac{1}{2}x\cdot\frac{x}{x-1}$ ή $E(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}$.

β) Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $E'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}$.

$$E'(x)\ge 0\Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{2(x-1)^2}\ge 0\overset{x>1}{\Leftrightarrow} x-2>0\Leftrightarrow x>2.$$

Για κάθε $x\in(1,2)$ είναι $E'(x)<0$ και για κάθε $x\in(2,+\infty)$ είναι $E'(x)>0$, επειδή η Ε είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$.

Η Ε έχει ελάχιστο για x = 2 το $E(2)=\frac{2^2}{2(2-1)}=2$.

γ) Είναι $E(3)=\frac{3^2}{2(3-1)}=\frac{9}{4}$ και $E'(3)=\frac{3(3-2)}{2(3-1)^2}=\frac{3}{8}$.

Η (ζ) έχει εξίσωση: $y-E(3)=E'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-\frac{9}{4}=\frac{3}{8}(x-3)\Leftrightarrow y=\frac{3}{8}x+\frac{9}{8}$.

Για y = 0 είναι $0=\frac{3}{8}x+\frac{9}{8}\Leftrightarrow 3x+9=0\Leftrightarrow x=-3$ και για x = 0 είναι $y=\frac{9}{8}$, οπότε $\Gamma(-3,0)$ και $\Delta\left(0,\frac{9}{8}\right)$.

δ) Επειδή το Κ κινείται πάνω στη (ζ) έχει συντεταγμένες $K(x(t),y(t))$ με $y(t)=\frac{3}{8}x(t)+\frac{9}{8}$ και $y'(t)=3\mu/\sec$. Είναι $y'(t)=\left(\frac{3}{8}x(t)+\frac{9}{8}\right)'\Leftrightarrow \cancel{3}=\frac{\cancel{3}}{8}x'(t)\Leftrightarrow x'(t)=8\mu/\sec$.

34441.Μία βιοτεχνία που ράβει ρούχα πρόκειται να ετοιμάσει μία παραγγελία για 600 παντελόνια σε μία ημέρα. Για το λόγο αυτό θα απασχολήσει ράφτες (άνδρες και γυναίκες), από το εργατικό δυναμικό της, που ράβουν 6 παντελόνια την ώρα και θα αμείβονται με 12 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των ραφτών, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα απασχολήσουν και μία από τις γυναίκες μόδιστρους της βιοτεχνίας ως επιστάτρια, την οποία θα πληρώνουν 20 ευρώ την ώρα. Επιπλέον οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα πληρώνουν ασφαλιστικές εισφορές, 20 ευρώ την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένης και της γυναίκας επιστάτριας. Αν x είναι ο αριθμός των ραφτών (άνδρες και γυναίκες) που θα απασχολήσει η βιοτεχνία για την διεκπεραίωση της παραγγελίας τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος για την εκτέλεση της παραγγελίας είναι:
$K(x)=20x+\frac{2000}{x}+1220$ ευρώ με $x>0$.

β) Να αποδείξετε ότι αν οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας απασχολήσουν για την εν λόγω παραγγελία, 10 ράφτες, η παραγγελία αυτή θα εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος.

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος.

δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι ράφτες, πέραν του οκταώρου (υπερωρία), ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος;

Λύση

α) Επειδή κάθε ράφτης ράβει 6 παντελόνια την ώρα , οι x ράφτες σε μία ώρα θα έχουν ράψει 6x παντελόνια, οπότε για τα 600 παντελόνια θα χρειαστούν $\frac{600}{6x}=\frac{100}{x}$ ώρες.

Για τους x ράφτες το κόστος ανά ημέρα είναι $12\cdot\frac{100}{x}\cdot x=1200$ ευρώ και το κόστος των ασφαλιστικών εισφορών τους είναι 20x, οπότε το συνολικό κόστος για τους ράφτες είναι $1200+20x$ ευρώ την ημέρα.

Επειδή η επιστάτρια πληρώνεται με 20 ευρώ την ώρα, το κόστος της είναι $20\cdot\frac{100}{x}=\frac{2000}{x}$, οπότε το συνολικό της κόστος μαζί με τις ασφαλιστικές εισφορές της είναι $\frac{2000}{x}+20$ ευρώ.

Επομένως το συνολικό κόστος είναι: $K(x)=1200+20x+\frac{2000}{x}+20=20x+\frac{2000}{x}+1220$, x > 0.

β) Για κάθε x > 0 είναι $K'(x)=20-\frac{2000}{x^2}=\frac{20x^2-2000}{x^2}$. Είναι

$$K'(x)\geq 0\Leftrightarrow \frac{20x^2-2000}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow 20x^2-2000\geq 0\Leftrightarrow 20x^2\geq 2000\Leftrightarrow x^2\geq 100\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\geq 10.$$

Για κάθε $x\in(0,10)$ είναι $K'(x)<0$ και για κάθε $x\in(10,+\infty)$ είναι $K'(x)>0$, επειδή η K είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,10]$ και γνησίως αύξουσα στο $[10,+\infty)$. Επειδή το κόστος K γίνεται ελάχιστο για x = 10, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας αν απασχολήσουν 10 ράφτες (άνδρες και γυναίκες), θα πετύχουν το ελάχιστο κόστος.

γ) Το ελάχιστο κόστος είναι το $K(10)=200+\frac{2000}{10}+1220=1620$ ευρώ.

δ) Ο χρόνος που θα απαιτηθεί για τους 10 ράφτες για να φέρουν σε πέρας την παραγγελία, σε μία ημέρα είναι $\frac{100}{10}=10$ ώρες. Επομένως οι 10 ράφτες εκτός του οκταώρου θα χρειαστεί να δουλέψουν υπερωρία για 2 ακόμη ώρες.

36814. Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν $800\ m^2$. Η μία πλευρά της περιοχής, μήκους x, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x, είναι:

$$K(x) = 8x + \frac{3200}{x},\ x > 0.$$

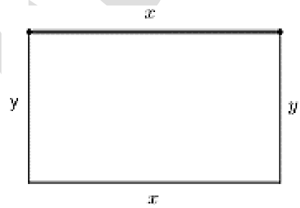
β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του.

γ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε x > 0.

Λύση

α) Επειδή το ορθογώνιο έχει εμβαδόν $800\ m^2$, είναι $x \cdot y = 800 \Leftrightarrow y = \frac{800}{x}$.

Η πέτρινη πλευρά έχει κόστος 6x ευρώ και ο συρμάτινος φράχτης μήκους $x + 2y <$ έχει κόστος $2(x+2y) = 2x + 4 \cdot \frac{800}{x} = 2x + \frac{3200}{x}$ ευρώ, οπότε το συνολικό κόστος είναι $K(x) = 6x + 2x + \frac{3200}{x},\ x > 0 \Leftrightarrow$



$K(x) = 8x + \frac{3200}{x},\ x > 0$.

β) Για x > 0 είναι $K'(x) = 8 - \frac{3200}{x^2} = \frac{8x^2 - 3200}{x^2}$.

$K'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8x^2 - 3200}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow 8x^2 - 3200 \geq 0 \Leftrightarrow 8x^2 \geq 3200 \Leftrightarrow x^2 \geq 400 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x \geq 20$.

Για κάθε $x \in (0,20)$ είναι $K'(x) < 0$ και για κάθε $x \in (20,+\infty)$ είναι $K'(x) > 0$, επειδή η K είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,20]$ και γνησίως αύξουσα στο $[20,+\infty)$. Το κόστος γίνεται ελάχιστο για x = 20 m, τότε $y = \frac{800}{20} = 40m$.

Το ελάχιστο κόστος είναι το $K(20) = 8 \cdot 20 + \frac{3200}{20} = 160 + 160 = 320$ ευρώ.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής του κόστους είναι το $K'(x) = 8 - \frac{3200}{x^2},\ x > 0$.

Είναι $K''(x) = \frac{6400}{x^3} > 0$, άρα η K΄ είναι γνησίως αύξουσα, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε x > 0.

Θέμα 3ο

34026. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-2\ln x$, $x>0$.

α) Να βρείτε:

i. Την μονοτονία της συνάρτησης f

ii. Το πρόσημο της f.

β) i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $x>0$, έχει μέγιστη τιμή την $g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2e}$.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

Λύση

α) i. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=-\frac{2}{x}<0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. $f(x)>0 \Leftrightarrow 1-2\ln x>0 \Leftrightarrow -2\ln x>-1 \Leftrightarrow \ln x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<x<e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ και για κάθε $x>\sqrt{e}$ είναι $f(x)<0$.

β) i. Για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)=\frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot x^{\cancel{2}}-2x\ln x}{x^4}=\frac{x(1-2\ln x)}{x^4}=\frac{f(x)}{x^3}$.

Για κάθε $0<x<\sqrt{e}$ είναι $f(x)>0 \Leftrightarrow g'(x)>0$ και η g είναι συνεχής στο $\left(0,\sqrt{e}\right]$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>\sqrt{e}$ είναι $f(x)<0 \Leftrightarrow g'(x)<0$ και η g είναι συνεχής στο $\left[\sqrt{e},+\infty\right)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η g έχει μέγιστο το $g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2e}$.

ii. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{x^2}\right)=-\infty(+\infty)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$.

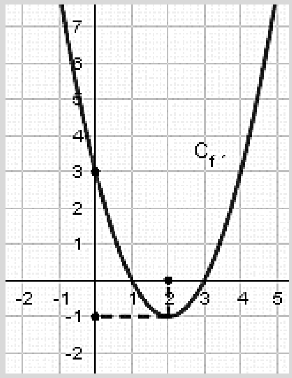
Στο διάστημα $\Delta_1=\left(0,e^{\frac{1}{2}}\right]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_1)=\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right]$. Στο διάστημα $\Delta_2=\left[e^{\frac{1}{2}},+\infty\right)$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_2)=\left(0,\frac{1}{2e}\right]$.

Η g έχει σύνολο τιμών το $g(A)=g(\Delta_1)\cup g(\Delta_2)=\left(-\infty,\frac{1}{2e}\right]$.

Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Θέμα 2ο

26736. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.



α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f ΄ είναι το σημείο $A(2,-1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$.

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_o = 2$;

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2)-1=0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 2$.

Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,5]$, οπότε η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$.

β) Επειδή το A ανήκει στη $C_{f'}$, η κλίση της f στο $x_o = 2$ είναι το $f'(2) = -1$.

γ) $3f(2)-1=0 \Leftrightarrow f(2)=\frac{1}{3}$. Η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-\frac{1}{3}=-x+2 \Leftrightarrow y=-x+\frac{7}{3}.$$

31527. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+3x^2-8,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f, διαφορετικό από το A, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε).

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=4x^3+6x$ και $f''(x)=12x^2+6$.

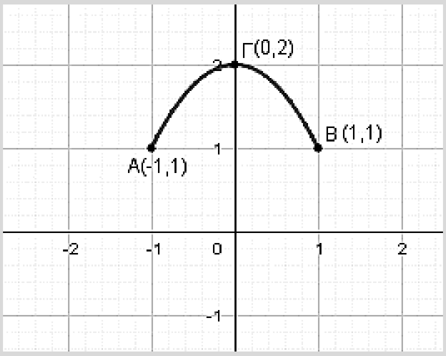
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f''(x)>0$, οπότε η f είναι κυρτή.

β) i. Είναι $f(1)=1+3-8=-4$ και $f'(1)=4+6=10$.

Η ε έχει εξίσωση: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y+4=10x+10 \Leftrightarrow y=10x+6$

ii. Επειδή η f είναι κυρτή, η f ΄είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1, επομένως η εξίσωση $f'(x)=\lambda_\varepsilon=10$ έχει μοναδική λύση την x = 1.

32799.Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $A(-1,1)$, $B(1,1)$, και $\Gamma(0,2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1\le f'(x)\le 2$, για κάθε $x\in[-1,1]$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Λύση

α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι όλα τα σημεία της $C_{f'}$ βρίσκονται εντός των ευθειών y = 1 και y = 2 ή πάνω σε αυτές, οπότε $1\le f'(x)\le 2$, για κάθε $x\in[-1,1]$.

β) Για κάθε $x\in[-1,1]$ είναι $f'(x)>0 \Leftrightarrow f\nearrow[-1,1]$.

γ) Στο διάστημα $[-1,0]$ η f ΄είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό και για κάθε $x\in[0,1]$ η f ΄είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

34438.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις: $f'(x)=0$ και $f''(x)=0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

α) $f'(x)=6x^2-30x+24,\ f''(x)=12x-30$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-30x+24=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=4$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow 12x-30=0\Leftrightarrow 12x=30\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

β) Για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(1,4)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$, $[4,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο [1, 4].
Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(1)=2-15+24=11$ και τοπικό ελάχιστο το $f(4)=-16$.

γ) Για κάθε $x\in\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$ είναι $f''(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$. Η f έχει σημείο καμπής στο $x=\dfrac{5}{2}$.

35172.Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(1+x^2)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}$.

$f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1+x^2}\ge 0 \Leftrightarrow 2x\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 0$.

Για κάθε x < 0 είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x > 0 είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(0)=0$.

β) Η f ΄είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1+x^2-2x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

$f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\ge 0 \Leftrightarrow 1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2\le 1 \Leftrightarrow |x|\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Για κάθε $x<-1$ ή $x>1$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $f''(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,-1],[1,+\infty)$ και κυρτή στο $[-1,1]$.

Η f έχει σημεία καμπής τα $(-1,f(-1))\equiv(-1,\ln 2)$ και $(1,f(1))\equiv(1,\ln 2)$.

Θέμα 4ο

23312. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2,2]$ τέτοια ώστε: f συνεχής στο $[-2,2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$, για κάθε $x\in[-2,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής.

β) Αν $f(0)=3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)^2=4-x^2$, για κάθε $x\in[-2,2]$ και κατόπιν ότι

$$f(x)=1+\sqrt{4-x^2},\ x\in[-2,2].$$

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\text{συν}x$.

Λύση

α) Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής το $(x_0,f(x_0))$, $x_0\in(-2,2)$, τότε $f''(x_0)=0$.

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, η συνάρτηση $f^2(x)-2f(x)+x^2-3$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε:

$(f^2(x)-2f(x)+x^2-3)'=0 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x=0 \Rightarrow (2f(x)f'(x)-2f'(x)+2x)'=0 \Leftrightarrow$

$2f'(x)f'(x)+2f(x)f''(x)-2f''(x)+2=0$ και για $x=x_0$ είναι

$2(f'(x_0))^2+2f(x_0)\cancel{f''(x_0)}^{0}-2\cancel{f''(x_0)}^{0}+2=0 \Leftrightarrow 2(f'(x_0))^2=-2$ αδύνατη. Επομένως η f δεν έχει σημείο καμπής.

β) i. $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0 \Leftrightarrow f^2(x)-2f(x)+1=4-x^2 \Leftrightarrow (f(x)-1)^2=4-x^2 \Leftrightarrow$

$|f(x)-1|=\sqrt{4-x^2}$ (1).

Έστω $h(x)=f(x)-1,\ x\in[-2,2]$.

Είναι $h(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=0 \Leftrightarrow 4-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$.

Για κάθε $x \in (-2, 2)$ είναι $h(x) \neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Είναι $h(0) = f(0) - 1 = 2 > 0$, άρα $h(x) > 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$, οπότε η (1) γίνεται:

$f(x) - 1 = \sqrt{4 - x^2} \Leftrightarrow f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in (-2, 2)$.

Για $x = 2$ και $x = -2$ είναι $|f(2) - 1| = \sqrt{4 - 4} \Leftrightarrow f(2) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(2) = 1$ και όμοια $f(-2) = 1$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{4 - x^2}, & x \in (-2, 2) \\ 1, & x = 2 \text{ ή } x = -2 \end{cases} = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$.

ii. Είναι $f'(x) = -\dfrac{2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Για κάθε $x \in (-2, 0)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-2) = 1$ και το $f(2) = 1$ και τοπικό μέγιστο το $f(0) = 3$.

Για κάθε $x \in [-2, 0]$ είναι $f(-2) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$ και για κάθε $x \in [0, 2]$ είναι $f(2) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow 1 \leq f(x) \leq 3$, άρα για κάθε $x \in [-2, 2]$ είναι $1 \leq f(x) \leq 3$, επομένως η f έχει ελάχιστο το 1 για $x = 2$ και $x = -2$ και μέγιστο το 3 για $x = 0$.

Επειδή για κάθε $x \in [-2, 2]$ είναι $1 \leq f(x) \leq 3$ και $-1 \leq συνx \leq 1$, η εξίσωση $f(x) = συνx$ έχει λύση μόνο όταν $f(x) = συνx = 1$, το οποίο είναι αδύνατο αφού η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει λύσεις τις $x = 2$ ή $x = -2$ που δεν επαληθεύουν την $συνx = 1$.

23531.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0,1)$ με $f(x_0) < 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$.

Λύση

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$ και $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{x^2}$.

Για κάθε x > 0 είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ και $f'(1) = e - 1$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Επειδή η f΄ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f'((0,1)) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x), \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x)\right) = (-\infty, e - 1)$.

Επειδή το μηδέν περιέχεται στο $f'((0,1))$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Για κάθε $x < x_0 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty, x_0]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $x > x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = x_0$ το $f(x_0)$.

Είναι $x_0 < 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(1) = e - 3 < 0$.

γ) Επειδή η f έχει ελάχιστο στο x_0 είναι $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x > 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0$, οπότε για κάθε x κοντά στο x_0 είναι $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x)-f(x_0)} = \lim\limits_{x\to x_0}\left[(f(x))^{2023}\frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right] = -\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{2023} = (f(x_0))^{2023} < 0$ και

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)-f(x_0)} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = 0$ και $f(x)-f(x_0) > 0$ κοντά στο x_0.

24760.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x - \lambda x,\ x > 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν ισχύει $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή.

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_o \in (1,e)$ με $f'(x_0) = 0$.

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$.

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_o που είναι το $e^{x_o}(1-x_o)+1-\ln x_o$.

Λύση

α) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x} - \lambda$ και $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$.

Για κάθε x > 0 είναι $f''(x) > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e \Leftrightarrow f(1) = f(e)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1,e]$, παραγωγίσιμη στο $(1,e)$ και $f(1) = f(e)$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_o \in (1,e)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

γ) Είναι $e - \lambda = e^e - 1 - \lambda e \Leftrightarrow \lambda e - \lambda = e^e - e - 1 \Leftrightarrow \lambda(e-1) = e^e - e - 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{e^e - e - 1}{e-1} = \frac{e^e}{e-1} - 1$

Επειδή η f είναι κυρτή η f ΄είναι γνησίως αύξουσα άρα

$1 < x_0 < e \Leftrightarrow f'(1) < f'(x_0) < f'(e) \Leftrightarrow f'(1) < 0 < f'(e)$, οπότε $f'(1)f'(e) < 0$. Επειδή η f ΄είναι συνεχής στο $[1,e]$, για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$.

δ) Για κάθε $0 < x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και για κάθε $x > x_0$ είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - \lambda x_0$. Όμως $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} - \frac{1}{x_0} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = e^{x_0} - \frac{1}{x_0}$, οπότε

$f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - x_0\left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0}\right) = e^{x_0} - \ln x_0 - x_0 e^{x_0} + 1 \Leftrightarrow f(x_0) = e^{x_o}(1-x_o)+1-\ln x_o$.

25745. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν

$f(1)=1,\ f'(1)=0,\ f(0)=f(2)$ και $\left(f'(x)\right)^2+f(x)f''(x)<0$, για κάθε $x\in(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$

ii. $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων.

Λύση

α) i. Έστω ότι υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, τότε η σχέση $\left(f'(x)\right)^2+f(x)f''(x)<0$ για $x=x_0$ γίνεται $\left(f'(x_0)\right)^2+\cancel{f(x_0)}^{0}f''(x_0)<0\Leftrightarrow\left(f'(x_0)\right)^2<0$ αδύνατο.

Άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

ii. Επειδή $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$ και η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,2)$.

Επειδή $f(1)=1>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

β) Είναι $\left(f'(x)\right)^2+f(x)f''(x)<0\Leftrightarrow f''(x)<-\dfrac{\left(f'(x)\right)^2}{f(x)}<0$, άρα η f είναι κοίλη στο $(0,2)$.

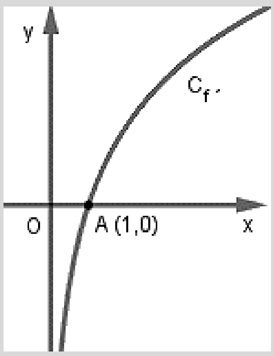
γ) Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0,2)$, η f ΄είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Για κάθε $0<x<1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(1)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [0,1], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $1<x<2\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(1)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [1,2], είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Η f έχει ελάχιστα τα $f(0),f(2)$ και μέγιστο το $f(1)=1$.

27320. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

Δίνεται επίσης ότι η f ΄ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f.

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1ον: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2ον: «Υπάρχει μοναδικό $\kappa\in(0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\kappa,f(\kappa))$ να ισούται με 2».

Ποιοι από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας.

Λύση

α) Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)$

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο Α(1,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της f′, άρα $f'(1) = 0$, επομένως η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1 και ο 1ος ισχυρισμός είναι σωστός.
Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄ είναι συνεχής, 1-1 και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(\kappa) = 2$, οπότε και ο 2ος ισχυρισμός είναι σωστός.

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f ΄είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο διάστημα αυτό.

27667.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + 2023, x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
ii. το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$.
β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η εξίσωση $e^x + x = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ.
γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η συνάρτηση $g(x) = \alpha x - f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho) - f(\rho)$.

Λύση

α) i. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = e^x + x$ και $f''(x) = e^x + 1$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) > 0$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
ii. Επειδή η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα.
Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x + x) = +\infty$.
Επειδή η f ΄ είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f'(A) = \mathbb{R}$.

β) Επειδή ο αριθμός α βρίσκεται στο σύνολο τιμών της f ΄και η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικός αριθμός $\rho \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f'(\rho) = \alpha$, δηλαδή η εξίσωση $e^x + x = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

γ) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = \alpha - f'(x)$.
Για κάθε $x < \rho \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\rho) = \alpha \Leftrightarrow \alpha - f'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$.
Για κάθε $x > \rho \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(\rho) = \alpha \Leftrightarrow \alpha - f'(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < 0$. Επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\rho]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\rho,+\infty)$.
Η g έχει μέγιστο το $g(\rho) = \alpha\rho - f(\rho) = f'(\rho)\rho - f(\rho)$.

31549.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023} > 2023^{2022}$.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021, 2022]$ και $[2022, 2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$.

Δίνεται $e \simeq 2,71$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}\geq 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 1 \Leftrightarrow 0<x\leq e$.

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(e,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(e)=\frac{1}{e}$.

β) $2022^{2023}>2023^{2022} \Leftrightarrow \ln 2022^{2023}>\ln 2023^{2022} \Leftrightarrow$

$2023\ln 2022>2022\ln 2023 \Leftrightarrow \frac{\ln 2022}{2022}>\frac{\ln 2023}{2023} \Leftrightarrow f(2022)>f(2023) \overset{f\searrow[e,+\infty)}{\Leftrightarrow} 2022<2023$ ισχύει.

γ) Η f΄είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$.

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x-3}{x^3}\geq 0 \Leftrightarrow 2\ln x-3\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x\geq e^{\frac{3}{2}}$.

Για κάθε $x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$ είναι $f''(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right]$ και κυρτή στο $\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)$. Η f έχει σημείο καμπής το $\left(e^{\frac{3}{2}},f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)\equiv\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$.

δ) Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021,2022]$ και $[2022,2023]$, υπάρχει $x_1\in(2021,2022)$ και $x_2\in(2022,2023)$ τέτοια, ώστε

$f'(x_1)=f(2022)-f(2021)$ και $f'(x_2)=f(2023)-f(2022)$.

Είναι $x_1<x_2 \overset{f'\nearrow\left[e^{\frac{3}{2}},+\infty\right)}{\Leftrightarrow} f'(x_1)<f'(x_2) \Leftrightarrow f(2022)-f(2021)<f(2023)-f(2022) \Leftrightarrow$

$2f(2022)<f(2021)+f(2023)$.

31550. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή.

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_o\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ το οποίο είναι μοναδικό.

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_o}+x_o$.

δ) η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη.

Λύση

α) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$, $f''(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0 \Rightarrow$ f κυρτή.

β) $f\cup(0,+\infty) \Leftrightarrow f'\nearrow(0,+\infty)$.

Είναι $f'\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-2=\sqrt{e}-2<0$, $f'(1)=e-1>0$, άρα $f'\left(\frac{1}{2}\right)f'(1)<0$, f΄ συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_o\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$. Επειδή η f΄ είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f΄.

Για κάθε $0<x<x_0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0$ και η f΄ είναι συνεχής στο $(0,x_0]$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x>x_0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0$ και η f΄ είναι συνεχής στο $[x_0,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει ελάχιστο το $f(x_0)$.

γ) Είναι $f'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0\Leftrightarrow e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\Leftrightarrow x_0=\ln\frac{1}{x_0}\Leftrightarrow x_0=-\ln x_0\Leftrightarrow\ln x_0=-x_0$.

$f(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}+x_0$.

γ) Επειδή η f έχει ελάχιστο το $f(x_0)$, ισχύει ότι $f(x)\geq f(x_0)$ για κάθε x > 0.

Θα συγκρίνουμε το $f(x_0)$ με το 2, είναι: $f(x_0)-2=\frac{1}{x_0}+x_0-2=\frac{1+x_0^2-2x_0}{x_0}=\frac{(x_0-1)^2}{x_0}>0\Leftrightarrow$ $f(x_0)>2$, οπότε για κάθε x > 0 είναι $f(x)>2$, επομένως η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη.

Θέμα 3ο

33994. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\right)=0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο $(0,g(0))$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή.

Λύση

α) Έστω $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Τότε $f(x)=\varphi(x)\eta\mu x$ με $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής, ισχύει ότι $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\varphi(x)\eta\mu x\right)=0$.

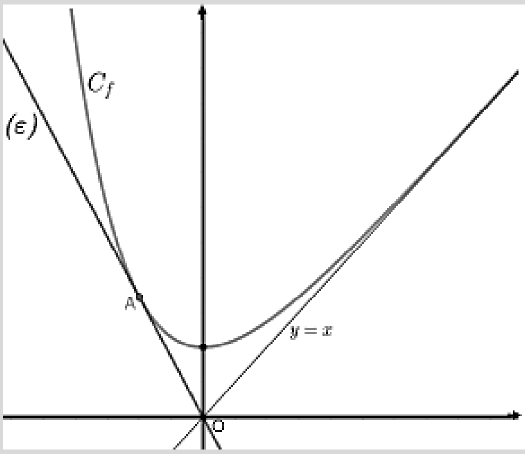
β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\varphi(x)\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0\cdot 1=0$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$.

γ) i. Είναι $g(0)=f(0)\cdot\eta\mu 0=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)=0\cdot 1=0$, άρα $g'(0)=0$. Η εφαπτομένη της C_g στο $(0,g(0))$, έχει εξίσωση: $y-g(0)=g'(0)x\Leftrightarrow y=0$, δηλαδή είναι ο άξονας x΄x. Αν η g ήταν κυρτή τότε θα βρίσκονταν πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, δηλαδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θα ήταν $g(x)\geq f(x)\eta\mu x$ και η ισότητα θα ίσχυε μόνο για x = 0. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η ισότητα ισχύει για x = π και γενικά για x = κπ, $\kappa\in\mathbb{Z}$. Επομένως η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή.

Κανόνες De L’ Hospital- Ασύμπτωτες

Θέμα 2ο

23530. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:



- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία y = x είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.

α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x) - x^2}{f(x)}$.

Λύση

α) Η εφαπτομένη (ε) έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - e + 1 = (1-e)(x-1) \Leftrightarrow y = (1-e)x$.

β) Επειδή η ευθεία $y = x = 1\cdot x + 0$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$ ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = 0$.

γ) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x) - x^2}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{xf(x)}{x} - \dfrac{x^2}{x}}{\dfrac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - x}{\dfrac{f(x)}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

24755. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι και στο $x_0 = 0$, οπότε

$$\lim_{x\to0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to0}\left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = \alpha \Leftrightarrow 1 - 1 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\eta\mu x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x-\eta\mu x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{1}=1-1=0$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0,f(0))$ έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)x\Leftrightarrow y=0$, δηλαδή είναι ο άξονας x΄x.

25748. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y=3x-2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}$.

Λύση

α) Επειδή η ευθεία $(\varepsilon): y=3x-2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-3x\right)=-2$.

β) Θέτουμε $f(x)-3x=g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)+3x$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)+3x\right)=+\infty+\infty=+\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\dfrac{f(x)}{x}-1\right)}{\cancel{x}\left(f(x)-3x\right)}=\dfrac{3-1}{-2}=-1$.

27084. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\dfrac{1}{x},\quad x\in(0,+\infty)$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Λύση

α) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-1}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x^2-1\geq 0\Leftrightarrow x^2\geq 1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x\geq 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=2$.

β) Για κάθε x > 0 είναι $f''(x)=\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)'=\dfrac{2}{x^3}>0$, οπότε η f είναι κυρτή.

γ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}+\dfrac{1}{x}-\cancel{x}\right)=0$, οπότε η y = x είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

31547.Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x\neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x=2$.
β) Να εξετάσετε αν η f είναι
i. συνεχής στο 2. **ii.** παραγωγίσιμη στο 2.

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3-2x)\dfrac{1}{(x-2)^2}=-1\cdot(+\infty)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=-\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}\underset{\substack{x\to 2\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{u^2}=+\infty$, άρα η ευθεία x = 2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

β) i. Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty\neq f(2)\in\mathbb{R}$ η f δεν είναι συνεχής στο 2.

ii. Επειδή η f δεν είναι συνεχής στο 2 δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

33995.Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x-\dfrac{x-1}{x^2+1}$.
α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.
β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y=x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "$1-1$".

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{x-1}{x^2+1}-x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\right)=0$, άρα η ευθεία y= x είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) $f(x)=x\Leftrightarrow x-\dfrac{x-1}{x^2+1}=x\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x^2+1}=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1$.
Το (1,1) είναι το κοινό σημείο των ε, C_f.

γ) Από το β σκέλος γνωρίζουμε ότι $f(1)=1$. Παρατηρούμε ότι $f(0)=1$.
Αν η f ήταν 1-1 τότε $f(0)=f(1)\Leftrightarrow 0=1$ άτοπο, άρα η f δεν είναι 1-1.

35602.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ με $x\neq 1$.
α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε΄): $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.
γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x-1}-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-(x-1)^2}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x-x^2+2x-1}{x-1}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x-1}=0$, άρα η ευθεία (ε): $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-2x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x^2-2x)\frac{1}{x-1}\right]=-1\cdot(+\infty)=-\infty$, άρα η ευθεία x = 1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

γ) Για κάθε $x\neq1$ είναι $f'(x)=\frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x)}{(x-1)^2}\Leftrightarrow$

$f'(x)=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}$.

Το τριώνυμο x^2-2x+2 έχει $\Delta<0$, οπότε για κάθε $x\neq1$ είναι $x^2-2x+2>0\Rightarrow f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$.

Θέμα 4ο

24759.Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x)\geq x^2-x+1$για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq\frac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον $f(1)=1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

ii. η f δεν είναι κοίλη.

Λύση

α) i. Για κάθε x > 0 είναι $\frac{f(x)}{x}\geq\frac{x^2}{x}-1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\geq x-1+\frac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$.

ii. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Για x < 0 είναι $\frac{f(x)}{x}\leq\frac{x^2}{x}-1+\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}\leq x-1+\frac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{1}{x}\right)=-\infty$ οπότε και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, οπότε και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια

ασύμπτωτη στο $+\infty$.
Τέλος επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Άρα η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Αρκεί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ ισχύει.

Άρα $f(x) \geq x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) i. Είναι $f(x) \geq \frac{3}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right)$, άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = \frac{1}{2}$ το οποίο είναι στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

ii. Αν η f ήταν κοίλη τότε η f ΄θα ήταν γνησίως φθίνουσα. Για κάθε $x > \frac{1}{2} \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ θα είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $\frac{1}{2} < 1 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1) \Leftrightarrow \frac{3}{4} > 1$ άτοπο. Άρα η f δεν είναι κοίλη.

26631. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$.
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς ασύμπτωτες.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\frac{x^2+3}{2x^2+1}\right) = 2 - x^2$.

Λύση

α) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \geq 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1 - x \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1$.

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) > 0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x) < 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει μέγιστο το $f(1) = -1$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x - x) = -\infty$, οπότε η x = 0, δηλαδή ο άξονας x΄x, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - x - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln x}{x} - 2\right)\right] = -\infty$, οπότε η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\ln x}{x} - 1\right)\right] = -\infty$, οπότε η C_f δεν έχει και οριζόντια ασύμπτωτη.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\ln\left(\dfrac{x^2+3}{2x^2+1}\right) = 2-x^2 \Leftrightarrow \ln\left(x^2+3\right)-\ln\left(2x^2+1\right)=2-x^2 \Leftrightarrow$

$\ln\left(x^2+3\right)-\left(x^2+3\right)=\ln\left(2x^2+1\right)-\left(2x^2+1\right) \Leftrightarrow f\left(x^2+3\right)=f\left(2x^2+1\right)$ (1).

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2+3 \geq 3$, $2x^2+1 \geq 1$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε η (1) γίνεται: $x^2+3=2x^2+1 \Leftrightarrow -x^2=-2 \Leftrightarrow x^2=2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$.

28314. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{\lambda x+1}}, & x>1 \\ 0, & x=1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=-1$.
β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Λύση

α) Αν $\lambda \neq -1$ τότε $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{1}{\lambda x+1}}=e^{\frac{1}{\lambda+1}}\neq 0=f(1)$ άτοπο αφού η f είναι συνεχής στο x = 1.

Για $\lambda=-1$ είναι $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} e^{\frac{1}{-x+1}} \underset{\substack{x\to1^+\Rightarrow\\ u\to-\infty}}{\overset{\frac{1}{-x+1}=u}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0=f(0)$

β) Για $x>1$η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=e^{\frac{1}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Στο x = 1 είναι $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{-x+1}}}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2}}{1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2}=$

$\underset{\substack{x\to1^+\Rightarrow\\ u\to-\infty}}{\overset{\frac{1}{-x+1}=u}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{e^u}{u^2} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{e^u}{2u}=\lim\limits_{u\to-\infty}\left(e^u\,\dfrac{1}{2u}\right)=0$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 1 με $f'(1)=0$.

γ) Για κάθε x > 1 είναι $f'(x)=e^{\frac{1}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$ και η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

δ) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{-x+1}} \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to0}}{\overset{\frac{1}{-x+1}=u}{=}} \lim\limits_{u\to0} e^u=1$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $f([1,+\infty))=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[0,1)$.

29130.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

ii. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y=x$ τα οποία και να προσδιορίσετε.

β) Για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)-x=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η y = x είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. Στο διάστημα $(0,+\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την y = x.

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x$. Είναι $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\eta\mu\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=1$.

Η εφαπτομένη της C_f στο A έχει εξίσωση: $y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow y-\frac{\pi}{2}=x-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow y=x$.

β) i. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}=e^{-x}=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=0$, άρα η y = x ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $1+\frac{1}{e^x}>1\Leftrightarrow\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)>\ln1\Leftrightarrow g(x)-x>0\Leftrightarrow g(x)>x$, άρα στο διάστημα $(0,+\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την y = x.

γ) Για κάθε x > 0 είναι $f(x)-x=x\eta\mu x-x=x(\eta\mu x-1)\le0\Leftrightarrow f(x)\le x$ και επειδή $x<g(x)$, είναι $f(x)<g(x)$ για κάθε x > 0.

31746.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2-4x+6\right)e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της M $(0,f(0))$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\ge2x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=(2x-4)e^x+\left(x^2-4x+6\right)e^x=\left(x^2-2x+2\right)e^x$.

Το τριώνυμο x^2-2x+2 έχει Δ= - 4 < 0, οπότε $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-4x+6\right)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4x+6}{e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-4}{-e^{-x}} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{e^{-x}} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-4x+6\right)e^x = +\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχει σύνολο τιμών το

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0,+\infty)$.

β) Είναι $f(0)=6$ και $f'(0)=2$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση ε:

$y - f(0) = f'(0)x \Leftrightarrow y = 2x+6$.

γ) Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f''(x) = (2x-2)e^x + \left(x^2-2x+2\right)e^x = e^x\left(2x-2+x^2-2x+2\right) = x^2e^x$.

Για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ είναι $f''(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει σημεία καμπής.

δ) Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\ge 2x+6$.

33648. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln^2 x$ και $g(x)=\ln x$ με κοινό πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f

i. ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτές της C_f και να σχεδιάσετε τις C_f, C_g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

γ) i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

ii. Η ευθεία $x=\alpha,\ 1<\alpha<e$ τέμνει τις C_f, C_g στα σημεία Α, Β. Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του τμήματος ΑΒ γίνεται μέγιστο.

Λύση

α) i. Για κάθε x > 0 είναι $f'(x) = 2\ln x\cdot(\ln x)' = \dfrac{2\ln x}{x}$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=0$.

ii. Για κάθε x > 0 είναι $f''(x) = 2\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2} = 2\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

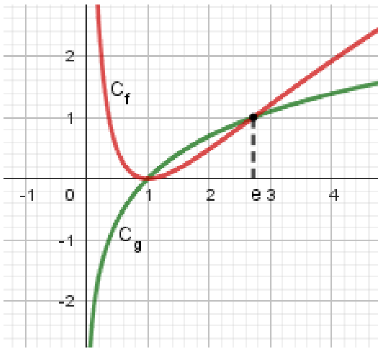
$f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2\dfrac{1-\ln x}{x^2}\ge 0 \Leftrightarrow 1-\ln x\ge 0 \Leftrightarrow \ln x\le 1 \Leftrightarrow 0<x\le e$.

Για κάθε $x\in(0,e)$ είναι $f''(x)>0$ και για κάθε x > e είναι $f''(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $(0,e]$ και κοίλη στο $[e,+\infty)$. Έχει σημείο καμπής το $\left(e,f(e)\right)\equiv(e,1)$.

iii. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

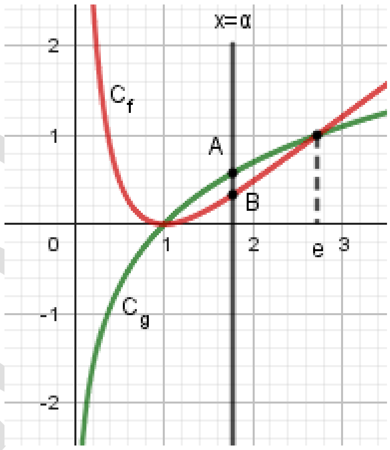
Είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\ln^2 x \overset{\ln x=u}{=} \lim\limits_{u\to-\infty} u^2 = +\infty$ άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την x = 0, δηλαδή τον άξονα y΄y. Είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2\ln x}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\frac{1}{x}}{1}=0$, άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.



x	0	1	e	$+\infty$
f''	+	+	0	−
f'	−	0	+	+
f	↘	↗	↗	

γ) i. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow \ln^2 x-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x(\ln x-1)=0\Leftrightarrow$
$(\ln x=0\Leftrightarrow x=1)$ ή $(\ln x=1\Leftrightarrow x=e)$.
Κοινά σημεία των C_f, C_g τα (1, 0) και (e, 1).



ii. Το μήκος του τμήματος AB είναι
$d(\alpha)=(AB)=g(\alpha)-f(\alpha)=\ln\alpha-\ln^2\alpha,\ \alpha\in(1,e)$.
Για κάθε $\alpha\in(1,e)$ είναι

$d'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{2\ln\alpha}{\alpha}=\dfrac{1-2\ln\alpha}{\alpha}$.

$d'(\alpha)\geq 0\Leftrightarrow \dfrac{1-2\ln\alpha}{\alpha}\geq 0\Leftrightarrow 1-2\ln\alpha\geq 0\Leftrightarrow$

$\ln\alpha\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \alpha\leq e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

Για κάθε $\alpha\in\left(1,\sqrt{e}\right)$ είναι $d'(\alpha)>0$ και για κάθε $\alpha\in\left(\sqrt{e},e\right)$, είναι $d'(\alpha)<0$, επειδή η d είναι συνεχής στο $\sqrt{e}$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(1,\sqrt{e}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\sqrt{e},e\right)$. Η d έχει μέγιστο για $\alpha=\sqrt{e}$.

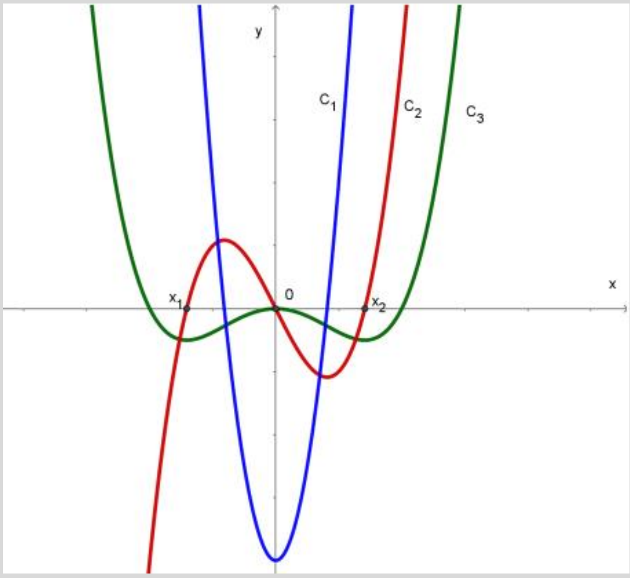
Αρχική συνάρτηση

Θέμα 2ο

32694. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F, όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$.
Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2,

α) i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F.

x	$-\infty$ x_1	0	x_2	$+\infty$
$F'=f$	+ 0	− 0	+ 0	−
F				



ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F.

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F.

Λύση

α) i.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F'=f$	−	0 +	0 −	0 +	
F	↘	↗	↘	↗	

ii. Η F έχει τοπικό ελάχιστο στο x_1, τοπικό μέγιστο στο 0 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

β) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η C_3 έχει τη μονοτονία και τα ακρότατα της F, οπότε αυτή είναι η γραφική της παράσταση. Επομένως η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f'.

Θέμα 4ο

24769. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$, $x>-1$ και έστω F αρχική της f με $F(1)=\ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>-1$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_o=1$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\dfrac{2F(x)-1}{x}\geq \ln 4-1$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{(x+1)'}{x+1}-\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(-1,0)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-1,0]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Για κάθε x > 0 είναι $F'(x)=f(x)$ και $F''(x)=f'(x)>0$, οπότε η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.

γ) i. ε: $y-F(1)=F'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\ln 2=f(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\ln 2=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)(x-1)\Leftrightarrow$

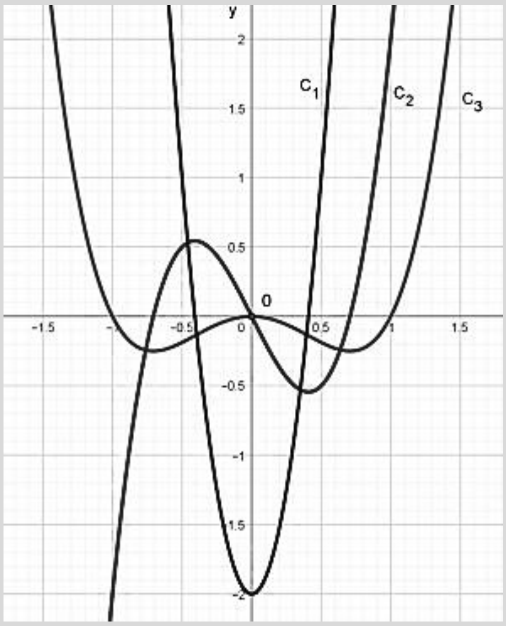
$$y=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)x-\ln 2+\frac{1}{2}+\ln 2\Leftrightarrow y=\left(\frac{2\ln 2-1}{2}\right)x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=\left(\frac{\ln 4-1}{2}\right)x+\frac{1}{2}.$$

ii. Επειδή η F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, οπότε για κάθε $x>0$ ισχύει

$$F(x)\geq\left(\frac{\ln 4-1}{2}\right)x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2F(x)\geq(\ln 4-1)x+1\Leftrightarrow 2F(x)-1\geq(\ln 4-1)x\Leftrightarrow\frac{2F(x)-1}{x}\geq\ln 4-1.$$

Θέμα 3ο

32693. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F, όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$.
Δίνεται επίσης ότι οι C_2 και C_3 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η C_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2,
α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση F ως προ την μονοτονία και τα ακρότατα.
β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F.
γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F.



Λύση

α) Είναι $F'(x) = f(x) = 2x(2x^2 - 1)$. Στο σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ είναι $f(x) < 0$ και για κάθε $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ είναι $f(x) > 0$, επειδή η F είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right]$, $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$. Η F έχει τοπικά ελάχιστα τα $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ και τοπικό μέγιστο το $F(0)$.

β) Επειδή η συνάρτηση που αντιπροσωπεύει τη C_3 έχει τη μονοτονία και τα ακρότατα της F, η C_3 είναι η γραφική παράσταση της F και η C_1 είναι η γραφική παράσταση της f'.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 12x^2 - 2$ και $F'(x) = f(x) = 4x^3 - 2x \Leftrightarrow$
$F'(x) = (x^4 - x^2)' \Leftrightarrow F(x) = x^4 - x^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$.
Στο σχήμα βλέπουμε ότι $F(0) = 0$, άρα $c = 0$, οπότε $F(x) = x^4 - x^2,\ x \in \mathbb{R}$.

Υπολογιστικά ολοκληρώματα

Θέμα 2ο

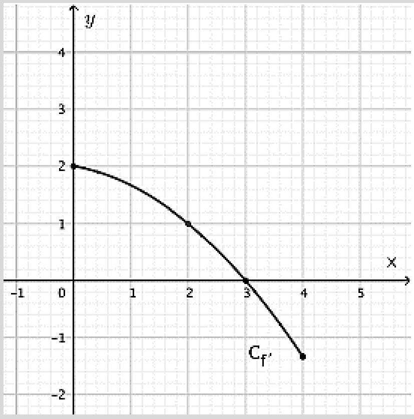
26366. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f΄ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα [0, 4].

α) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 3].

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f''(x)dx$.



Λύση

α) Η κλίση της f στο $x_0 = 2$ είναι το $f'(2) = 1$.

β) Για κάθε $x \in (0,3)$ είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής στο [0, 3], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

γ) $1 < 2 \overset{f \nearrow [0,3]}{\Leftrightarrow} f(1) < f(2)$.

δ) $\int_0^3 f''(x)dx = f'(3) - f'(0) = 0 - 2 = -2$

Θέμα 4ο

23957. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} f(x)$.

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1 .

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \dfrac{2\ln x \cdot f(x) + xe^x}{x\left(f(x) + e^x\right)} dx$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $g(x) = e^x$, $h(x) = x^2$ και $\varphi(x) = \ln x$ με $f'(x) = e^{\ln^2 x}\left(\ln^2 x\right)' = f(x) \cdot 2\ln x (\ln x)' = 2\dfrac{\ln x}{x} f(x)$.

β) Είναι $f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2\dfrac{\ln x}{x} f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \ln x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x) > 0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1) = 1$.

γ) $I=\int_1^e \frac{2\ln x\cdot f(x)+xe^x}{x\left(f(x)+e^x\right)}dx=\int_1^e \frac{\frac{2\ln x\cdot f(x)}{x}+\frac{xe^x}{x}}{\frac{x\left(f(x)+e^x\right)}{x}}dx \Leftrightarrow$

$$I=\int_1^e \frac{f'(x)+e^x}{f(x)+e^x}dx=\int_1^e \frac{\left(f(x)+e^x\right)'}{f(x)+e^x}dx \Leftrightarrow I=\left[\ln\left|f(x)+e^x\right|\right]_1^e=\ln\left(f(e)+e^e\right)-\ln\left(f(1)+e\right)=\ln\frac{e+e^x}{1+e}.$$

24770. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-1\right)+x-1,\ x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_o=\ln 2$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln\left(e^x-1\right)\le 2x-\ln 4$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}+1$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\frac{e^x\left(e^x-1\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

β) i. Είναι $f(\ln 2)=\ln\left(e^{\ln 2}-1\right)+\ln 2-1=\ln(2-1)+\ln 2-1=\ln 1+\ln 2-1=\ln 2-1$ και

$f'(\ln 2)=\frac{e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}-1}+1=\frac{2}{2-1}+1=3$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $x_o=\ln 2$ έχει εξίσωση ε:

$y-f(\ln 2)=f'(\ln 2)(x-\ln 2)\Leftrightarrow y-\ln 2+1=3x-3\ln 2\Leftrightarrow y=3x-2\ln 2-1$.

ii. Επειδή η f είναι κοίλη βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\le 3x-2\ln 2-1\Leftrightarrow \ln\left(e^x-1\right)+x-1\le 3x-2\ln 2-1\Leftrightarrow \ln\left(e^x-1\right)\le 2x-\ln 4$.

γ) $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2-\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\frac{2e^x-1}{\cancel{e^x}}}{\frac{1-e^x}{\cancel{e^x}}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^x-1}{1-e^x}dx\Leftrightarrow$

$I=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^x-1}{e^x-1}dx=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^x-1+e^x}{e^x-1}dx=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}1+\frac{e^x}{e^x-1}dx\Leftrightarrow$

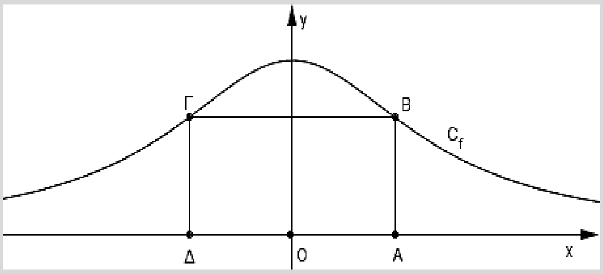
$I=-\int_{\ln 2}^{\ln 3}f'(x)dx=-\left[f(x)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}=-f(\ln 3)+f(\ln 2)\Leftrightarrow$

$I=-\ln\left(e^{\ln 3}-1\right)-\ln 3+1+\ln 2-1=\ln 2-\ln 3+\ln 2=-\ln 3$

24771. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $\left(x^2+1\right)f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.



β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης $\alpha,\ \alpha>0$ του σημείου $A(\alpha,\ 0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο $E(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1},\ \alpha>0$. Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1)=\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^1 F(x)dx=\ln\sqrt{2}$.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\left(x^2+1\right)f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}\Leftrightarrow$

$f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}=-\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}+c,\ c\in\mathbb{R}$. Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow 1+c=1\Leftrightarrow c=0$, άρα

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}=f(x)$, άρα η f είναι άρτια, οπότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y.

Είναι $B\left(\alpha,f(\alpha)\right)$ και λόγω συμμετρίας $\Gamma\left(-\alpha,f(\alpha)\right),\ \Delta(-\alpha,0)$.

γ) Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδό $E(\alpha)=(A\Delta)(AB)=2\alpha f(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1},\ \alpha>0$.

Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$E'(\alpha)=\frac{2\left(\alpha^2+1\right)-2\alpha\cdot 2\alpha}{\left(\alpha^2+1\right)^2}=\frac{2-2\alpha^2}{\left(\alpha^2+1\right)^2}=\frac{2(1-\alpha)(1+\alpha)}{\left(\alpha^2+1\right)^2}.$$

Είναι $E'(\alpha)\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{2(1-\alpha)(1+\alpha)}{\left(\alpha^2+1\right)^2}\ge 0\Leftrightarrow 1-\alpha\ge 0\Leftrightarrow\alpha\le 1$.

Για κάθε $\alpha\in(0,1)$ είναι $E'(\alpha)>0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $(0,1]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε $\alpha\in(1,+\infty)$ είναι $E'(\alpha)<0$ και επειδή η Ε είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η Ε παρουσιάζει μέγιστο για α = 1.

δ) $\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1 x'\cdot F(x)dx=\left[xF(x)\right]_0^1-\int_0^1 xF'(x)dx=F(1)-\int_0^1 xf(x)dx\Leftrightarrow$

$\int_0^1 F(x)dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \ln 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx \Leftrightarrow$

$\int_0^1 F(x)dx = \ln 2 - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$.

25766. Στον διπλανό πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $f(0)=1$ και $f(2)=5$ τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |x^2-4|+5$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$.

Λύση

α) Επειδή η f είναι άρτια, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=f(x)$. Για x = 2 είναι $f(-2)=f(2)=5$.

Για κάθε $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$ είναι $f'(x)>0$ και η f είναι συνεχής στα $(-\infty,-2]$, $[0,2]$, οπότε είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα αυτά. Για κάθε $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$ και η f είναι συνεχής στα $[-2,0]$, $[2,+\infty)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα αυτά. Η f έχει τοπικά μέγιστα τα $f(-2)=f(2)=5$ και τοπικό ελάχιστο το $f(0)=1$.

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(-x) \underset{\substack{x\to-\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{-x=u}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = -\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=(-\infty,5]$. Στο διάστημα $\Delta_2=[-2,0]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2)=[1,5]$. Στο διάστημα $\Delta_3=[0,2]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_3)=[1,5]$. Στο διάστημα $\Delta_4=[2,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_4)=(-\infty,5]$.

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)\cup f(\Delta_4)=(-\infty,5]$.

γ) Επειδή $f(A)=(-\infty,5]$, είναι $f(x)\le 5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Όμως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|x^2-4|\ge 0 \Leftrightarrow |x^2-4|+5\ge 5$, άρα η εξίσωση $f(x)=|x^2-4|+5$ έχει λύση αν και μόνο αν

$$\begin{cases} f(x)=5 \\ |x^2-4|+5=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ή } -2 \\ |x^2-4|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ ή } -2 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 2 \\ x=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm 2$$

δ) $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1} xf(-x)dx \underset{\substack{x=-1\Rightarrow u=1\\ x=1\Rightarrow u=-1}}{\overset{-x=u\Rightarrow dx=-du}{=}} \int_{1}^{-1} -uf(u)(-du) \Leftrightarrow$

$\int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{1}^{-1} uf(u)du = -\int_{-1}^{1} xf(x)dx \Leftrightarrow 2\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$.

26184.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}},\ x>0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x=e^2$.

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{e^2} f(x)dx$.

Λύση

α) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\infty(+\infty)=-\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\overset{\sqrt{x}=u}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\frac{1}{u}=+\infty$, άρα η ευθεία x = 0, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^{\cancel{2}}}=0$, άρα η ευθεία y = 0, δηλαδή ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\ln x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^{\cancel{2}}}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

Είναι $f'(x)\ge0\Leftrightarrow\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}\ge0\Leftrightarrow 2-\ln x\ge0\Leftrightarrow \ln x\le2\Leftrightarrow x\le e^2$.

Για κάθε $x\in(0,e^2)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(e^2,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e^2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e^2,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x=e^2$.

γ) $I=\int_1^{e^2} f(x)dx=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^{e^2}\ln x\left(2\sqrt{x}\right)'dx\Leftrightarrow I=\left[\ln x\cdot2\sqrt{x}\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\cdot2\sqrt{x}dx$

$I=2\cdot2\sqrt{e^2}-2\int_1^{e^2}\frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^{\cancel{2}}}dx=4e-2\left[2\sqrt{x}\right]_1^{e^2}=4e-4e+4=4$

27321. Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς.

Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y=f(x)=\alpha x e^{-\beta x},\ x\in(0,+\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta\in(0,1)$ και $\alpha\in(1,+\infty)$.

α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο.

Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y;

β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά.

γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f. Να αποδείξτε ότι $F(\beta)-F(2\beta)=\dfrac{\alpha}{\beta^2}\cdot\dfrac{2\beta^2+1-(1+\beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$.

Λύση

α) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)=\alpha e^{-\beta x}-\alpha\beta x e^{-\beta x}=\alpha e^{-\beta x}(1-\beta x)$

$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow \alpha e^{-\beta x}(1-\beta x)\geq 0\Leftrightarrow 1-\beta x\geq 0\Leftrightarrow x\leq\dfrac{1}{\beta}$.

Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{\beta}\right)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in\left(\dfrac{1}{\beta},+\infty\right)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\dfrac{1}{\beta}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{1}{\beta},+\infty\right)$. Ο πληθυσμός την επόμενη χρονιά γίνεται μέγιστος όταν ο σημερινός πληθυσμός είναι $x=\dfrac{1}{\beta}$. Η μέγιστή τιμή του είναι $f\left(\dfrac{1}{\beta}\right)=\dfrac{\alpha}{\beta e}$.

β) Όταν ο πληθυσμός των ψαριών είναι απεριόριστα μεγάλος, τότε $x\to+\infty$ και τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha x e^{-\beta x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x}{e^{\beta x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha}{\beta e^{\beta x}}=0$, δηλαδή την αμέσως επόμενη χρονιά ο πληθυσμός των ψαριών πρακτικά θα εξαφανιστεί.

γ) Είναι $F(\beta)-F(2\beta)=\int_{2\beta}^{\beta}f(x)dx=\alpha\int_{2\beta}^{\beta}xe^{-\beta x}dx=\alpha\int_{2\beta}^{\beta}x\left(-\dfrac{1}{\beta}e^{-\beta x}\right)'dx=$

$\alpha\left[-x\dfrac{1}{\beta}e^{-\beta x}\right]_{2\beta}^{\beta}+\alpha\int_{2\beta}^{\beta}e^{-\beta x}dx=-\alpha\left(e^{-\beta^2}-2e^{-2\beta^2}\right)-\alpha\left[-\dfrac{1}{\beta}e^{-\beta x}\right]_{2\beta}^{\beta}=\ldots=\dfrac{\alpha}{\beta^2}\cdot\dfrac{2\beta^2+1-(1+\beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$

27322. Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση $T(t)=E+(T_0-E)e^{-kt}$ όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E<T_0$.
- $T_0=T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim\limits_{t\to+\infty}T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

β) Να αποδείξτε ότι $T'(t)=k\left[E-T(t)\right]$.

γ) Να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1\left(E-T(t)\right)\cdot\ln\left(T(t)\right)dt$ ισούται με $\dfrac{2e^3-3e^4}{k}$ αν είναι $T(0)=e^4$ και $T(1)=e^3$.

Λύση

α) $\lim\limits_{t\to+\infty}T(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[E+(T_0-E)e^{-kt}\right]\underset{\substack{t\to+\infty\Rightarrow\\ x\to-\infty}}{\overset{-kt=x}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left[E+(T_0-E)e^{x}\right]=E+(T_0-E)\cdot 0=E$.

β) Η συνάρτηση Τα είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $T'(t)=\left(E+(T_0-E)e^{-kt}\right)'=-k(T_0-E)e^{-kt}$ (1)

Είναι $T(t)=E+(T_0-E)e^{-kt} \Leftrightarrow T(t)-E=(T_0-E)e^{-kt} \Leftrightarrow -(T_0-E)e^{-kt}=E-T(t)$ (2).

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι $T'(t)=k\left[E-T(t)\right]$.

γ) Είναι $I=\int_0^1\left(E-T(t)\right)\cdot\ln\left(T(t)\right)dt=\int_0^1\frac{1}{k}T'(t)\cdot\ln\left(T(t)\right)dt$.

Θέτουμε $T(t)=x$ οπότε $T'(t)dt=dx$. Για t=0 είναι x=T(0)= e^4 και για t=1 είναι x=T(1)= e^3, οπότε:

$$I=\frac{1}{k}\int_{e^4}^{e^3}\ln x dx=\frac{1}{k}\int_{e^4}^{e^3}\ln x\cdot(x)'dx=\frac{1}{k}\left[x\ln x\right]_{e^4}^{e^3}-\frac{1}{k}\int_{e^4}^{e^3}\frac{1}{x}\cdot xdx \Leftrightarrow$$

$$I=\frac{1}{k}\left(3e^3-4e^4\right)-\frac{1}{k}\left(e^3-e^4\right)=\frac{2e^3-3e^4}{k}.$$

29549.Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε: $f'(0)=f(0)=0$ και $\int_0^\pi\left(f(x)+f''(x)\right)ημxdx=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^\pi f''(x)ημxdx=-\int_0^\pi f'(x)συνxdx$.

β) $f(\pi)=0$.

γ) Στο διάστημα $(0,\pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής.

Λύση

α) $\int_0^\pi f''(x)ημxdx=\int_0^\pi\left(f'(x)\right)'ημxdx=\left[f'(x)ημx\right]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)συνxdx=$

$f'(\pi)ημπ-f'(0)ημ0-\int_0^\pi f'(x)συνxdx=-\int_0^\pi f'(x)συνxdx$

β) $\int_0^\pi\left(f(x)+f''(x)\right)ημxdx=0 \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)ημxdx+\int_0^\pi f''(x)ημxdx=0 \Leftrightarrow$

$\int_0^\pi f(x)(-συνx)'dx-\int_0^\pi f'(x)συνxdx=0 \Leftrightarrow$

$-\left[f(x)συνx\right]_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)συνxdx-\int_0^\pi f'(x)συνxdx=0 \Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=0 \Leftrightarrow f(\pi)=0$.

γ) Επειδή $f(\pi)=f(0)$, για την f εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο [0,π], οπότε υπάρχει $x_1\in(0,\pi)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$. Επειδή $f'(x_1)=f'(0)$, για την f ΄εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[0,x_1]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,x_1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ το σημείο $\left(\xi,f(\xi)\right)$ είναι πιθανό σημείο καμπής της f.

29837.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1-x}$, με $x\neq1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστρόφου.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ f$.

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f\circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $\varphi(x)=(f\circ f)(x)=\frac{x-1}{x}$ με $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3\varphi(x)dx$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \neq 1$ με $f(x_1) = f(x_2)$ είναι $\frac{1}{1-x_1} = \frac{1}{1-x_2} \Leftrightarrow 1-x_2 = 1-x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Για κάθε $x \neq 1$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} = y \ (1)$.

Είναι $\frac{1}{1-x} \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$ και η (1) γίνεται: $1-x = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = 1-\frac{1}{y} = \frac{y-1}{y}$.

Είναι $x \neq 1 \Leftrightarrow \frac{y-1}{y} \neq 1 \Leftrightarrow y-1 \neq y$ ισχύει. Άρα $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y}$, $y \neq 0$, οπότε $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$, $x \neq 0$.

β) $D_{f\circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_f\} = \left\{x \neq 1 / \frac{1}{1-x} \neq 1\right\} \Leftrightarrow D_{f\circ f} = \{x \neq 1 / 1-x \neq 1\} = \{x \neq 1 / x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0,1\}$,

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$.

γ) Επειδή οι συναρτήσεις $f \circ f$ και f^{-1} δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού δεν είναι ίσες και δεν συμφωνούμε με τον ισχυρισμό του μαθητή.

δ) $\int_2^3 \varphi(x)dx = \int_2^3 \frac{x-1}{x}dx = \int_2^3 \left(1-\frac{1}{x}\right)dx = \left[x - \ln|x|\right]_2^3 = 3 - \ln 3 - 2 + \ln 2 = 1 + \ln\frac{2}{3}$.

33998. Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοιχτό τη χρονική στιγμή $t = 0$. Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου t (σε εβδομάδες) δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln\frac{4}{5}dt$.

β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο $g'(t) = 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln\frac{4}{5}$, για κάθε $t > 0$, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου.

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t) = 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t \in [0, +\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

Λύση

α) $\int_0^2 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln\frac{4}{5}dt = 5\int_0^2 \left[\left(\frac{4}{5}\right)^t\right]' dt = 5\left[\left(\frac{4}{5}\right)^t\right]_0^2 = 5\left(\frac{16}{25} - 1\right) = -\frac{9}{5}$

β) Επειδή το δοχείο είναι 5 λίτρων, ισχύει ότι $g(0) = 5$.

Είναι $\int_0^2 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot \ln\frac{4}{5}dt = -\frac{9}{5} \Leftrightarrow \int_0^2 g'(t)dt = -\frac{9}{5} \Leftrightarrow g(2) - g(0) = -\frac{9}{5} \Leftrightarrow$

$g(2) - 5 = -\frac{9}{5} \Leftrightarrow g(2) = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$

γ) Είναι $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t = 0$, άρα καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης τείνει να μηδενιστεί, άρα θα υπάρχει μυρωδιά στο δοχείο.

34565.Θεωρούμε τους αριθμούς α, β με $1<\alpha<\beta$ και την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, με συνεχή παράγωγο, ώστε $f(x)>0$, για κάθε $[\alpha,\beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$, με $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)+\lambda\alpha-f(\alpha)}{x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ ώστε $cf'(c)-f(c)-\lambda\alpha+f(\alpha)=0$.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c)\neq\lambda$, να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c,f(c))$ και η ευθεία ΑΒ τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

δ) Αν είναι $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}=e^2$, να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}}\frac{x\cdot f'(x^2+1)}{f(x^2+1)}dx$ ισούται με - 1.

Λύση

α) Είναι $\lambda=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$g'(x)=\dfrac{f'(x)x-(f(x)+\lambda\alpha-f(\alpha))}{x^2}$.Είναι $g(\alpha)=\dfrac{\cancel{f(\alpha)}+\lambda\alpha-\cancel{f(\alpha)}}{\alpha}=\lambda$,

$$g(\beta)=\frac{f(\beta)+\lambda\alpha-f(\alpha)}{\beta}=\frac{f(\beta)-f(\alpha)+\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\alpha}{\beta}\Leftrightarrow$$

$$g(\beta)=\frac{\dfrac{\beta f(\beta)-\cancel{\alpha f(\beta)}-\beta f(\alpha)+\cancel{\alpha f(\alpha)}+\cancel{\alpha f(\beta)}-\cancel{\alpha f(\alpha)}}{\beta-\alpha}}{\beta}\Leftrightarrow g(\beta)=\frac{\beta\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}}{\beta}=\lambda.$$

Επειδή επιπλέον $g(\alpha)=g(\beta)$, η συνάρτηση g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [α, β].

β) Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $g'(c)=0\Leftrightarrow$

$$\frac{f'(c)c-(f(c)+\lambda\alpha-f(\alpha))}{c^2}=0\Leftrightarrow cf'(c)-f(c)-\lambda\alpha+f(\alpha)=0$$

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο Μ έχει εξίσωση $y-f(c)=f'(c)(x-c)\Leftrightarrow y=xf'(c)-cf'(c)+f(c)$.

Για x = 0 είναι $y=-cf'(c)+f(c)$, δηλαδή η εφαπτομένη τέμνει τον y΄y στο $K(0,-cf'(c)+f(c))$.

Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y-f(\alpha)=\lambda(x-\alpha)$ και για x = 0 είναι $y=f(\alpha)-\lambda\alpha$.

Η ΑΒ τέμνει τον y΄y στο σημείο $\Lambda(0,f(\alpha)-\lambda\alpha)$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c,f(c))$ και η ευθεία ΑΒ τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$, αν και μόνο αν τα σημεία Κ, Λ ταυτίζονται, δηλαδή όταν

$-cf'(c)+f(c)=f(\alpha)-\lambda\alpha\Leftrightarrow cf'(c)-f(c)-\lambda\alpha+f(\alpha)=0$ που ισχύει από το β σκέλος.

δ) Θέτουμε $x^2+1=u\Rightarrow 2xdx=du$. Για $x=\sqrt{\alpha-1}$ είναι $u=\alpha$ και για $x=\sqrt{\beta-1}$ είναι $u=\beta$. Τότε

$$I=\int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}}\frac{x\cdot f'\left(x^2+1\right)}{f\left(x^2+1\right)}dx=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}}\frac{f'\left(x^2+1\right)}{f\left(x^2+1\right)}2xdx=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'(u)}{f(u)}du=\frac{1}{2}\Big[\ln\left|f(u)\right|\Big]_{\alpha}^{\beta}\Leftrightarrow$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=\frac{1}{2}\ln e^{-2}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1 .$$

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

Θέμα 2ο

33593. Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx=2$, $\int_1^3 f(x)dx=4$ και $\int_1^7 f(x)dx=10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_3^2 f(x)dx$.

β) $\int_3^7 f(x)dx$

γ) $\int_7^2 f(x)dx$

δ) $\int_1^3 \left(f(x)-x\right)dx$.

Λύση

α) $\int_3^2 f(x)dx=-\int_2^3 f(x)dx=-2$.

β) $\int_3^7 f(x)dx=\int_3^1 f(x)dx+\int_1^7 f(x)dx=-4+10=6$

γ) $\int_7^2 f(x)dx=\int_7^3 f(x)dx+\int_3^2 f(x)dx=-6-2=-8$

δ) $\int_1^3 \left(f(x)-x\right)dx=\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3 xdx=4-\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3=4-\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)=4-4=0$

Θέμα 4ο

23219. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1)=f'(1)=2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\left(1,f(1)\right)$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x)dx>1$.

ii. $\int_0^1 xf'(x)dx<1$.

Λύση

α) Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1,f(1))$ έχει εξίσωση

ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-2=2x-2\Leftrightarrow y=2x$.

Επειδή η f είναι κυρτή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq 2x$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq 2x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}2x=+\infty$, άρα και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

γ) i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\geq 2x$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 1, άρα

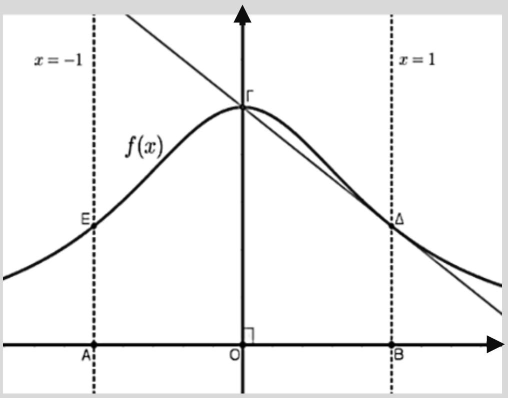
$\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1 2xdx=\left[x^2\right]_0^1=1$.

ii. $\int\limits_0^1 xf'(x)dx<1\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx<1\Leftrightarrow f(1)-\int_0^1 f(x)dx<1\Leftrightarrow -\int_0^1 f(x)dx<1-2\Leftrightarrow$

$\int_0^1 f(x)dx>1$ ισχύει.

23955. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα x'x στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα.

Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 f(x)dx>\dfrac{3}{2}$.

Λύση

α) Είναι $f(0)=1$ και $f(1)=\dfrac{1}{2}$, άρα $\Gamma(0,1)$ και $\Delta\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

Η ευθεία ΓΔ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\Gamma\Delta}=\dfrac{\frac{1}{2}-1}{1-0}=-\dfrac{1}{2}$ και εξίσωση: $y-1=-\dfrac{1}{2}x\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Δ έχει εξίσωση $y-\dfrac{1}{2}=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+1$, δηλαδή είναι η ΓΔ.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x)>-\dfrac{1}{2}x+1$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Είναι $f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x-2}{2}=\frac{2+(x-2)(x^2+1)}{2(x^2+1)}\Leftrightarrow$

$f(x)-\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{\cancel{2}+x^3+x-2x^2-\cancel{2}}{2(x^2+1)}=\frac{x(x^2-2x+1)}{2(x^2+1)}=\frac{x(x-1)^2}{2(x^2+1)}>0$ για κάθε $x\in(0,1)$, άρα

$f(x)>-\frac{1}{2}x+1$ για κάθε $x\in(0,1)$.

γ) Για κάθε $x\in D_f=\mathbb{R}$ είναι $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=\frac{1}{1+(-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=f(x)$, άρα η f είναι άρτια.

Είναι $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{0}f(-x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx$

Θέτουμε $-x=u\Leftrightarrow x=-u\Rightarrow dx=-du$. Για x = 0 είναι u = 0 και για $x=-1$ είναι u= 1. Τότε

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=-\int_{1}^{0}f(u)du+\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{0}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx$.

Για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $f(x)\geq-\frac{1}{2}x+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0 και x = 1, οπότε

$\int_{0}^{1}f(x)dx>\int_{0}^{1}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)dx=\left[-\frac{x^2}{4}+x\right]_0^1=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$, οπότε $\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_{0}^{1}f(x)dx>2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$.

24758.Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x)=(x^2-1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1)=f(-1)=0$.

β) $f'(1)\geq 0$ και $f'(-1)\leq 0$.

γ) η f δεν είναι κοίλη.

δ) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx\leq 0$.

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι $g(1)=g(-1)=0$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\geq g(1)$ και $g(x)\geq g(-1)$, άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$.

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=2xf(x)+(x^2-1)f'(x)$ και τα $x=1$ και $x=-1$ είναι εσωτερικά του πεδίου ορισμού της, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat είναι $g'(1)=0\Leftrightarrow 2f(1)=0\Leftrightarrow f(1)=0$ και $g'(-1)=0\Leftrightarrow 2f(-1)=0\Leftrightarrow f(-1)=0$.

β) Είναι $f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$. Είναι $g(x)\geq 0\Leftrightarrow(x^2-1)f(x)\geq 0$ (1), οπότε:

Αν x > 1 $\Leftrightarrow x-1>0$ τότε από την (1) προκύπτει $f(x)>0$ οπότε $\frac{f(x)}{x-1}>0\Rightarrow\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{x-1}\geq 0\Rightarrow f'(1)\geq 0$ Αν $x<-1\Leftrightarrow x+1<0$ τότε από την (1) προκύπτει ότι $f(x)>0$ οπότε $\frac{f(x)}{x+1}<0\Rightarrow$

$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)}{x+1}\leq 0\Rightarrow f'(-1)\leq 0$.

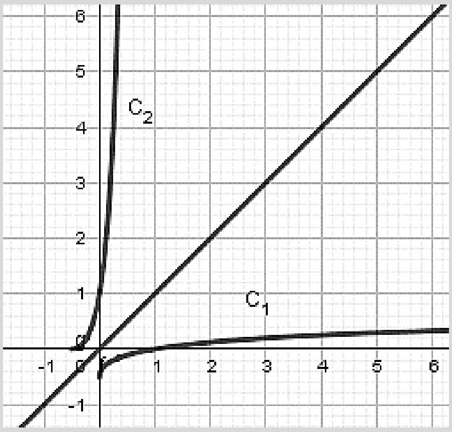
γ) Έστω ότι η f είναι κοίλη τότε η f ΄θα είναι γνησίως φθίνουσα. Τότε $-1<1\Leftrightarrow f'(-1)>f'(1)$ που είναι άτοπο αφού $f'(-1)\leq 0\leq f'(1)$. Άρα η f δεν είναι κοίλη.

δ) $\int_{-1}^{1}\left(x^3-3x\right)f'(x)dx=\left[\left(x^3-3x\right)f'(x)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(3x^2-3\right)f(x)dx=-3\int_{-1}^{1}g(x)dx$

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $g(x)\geq 0$, άρα $\int_{-1}^{1}g(x)dx\geq 0\Leftrightarrow -3\int_{-1}^{1}g(x)dx\leq 0\Leftrightarrow \int_{-1}^{1}\left(x^3-3x\right)f'(x)dx\leq 0$.

24131.Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2},\ x\geq 0.$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
β) Να βρείτε την αντίστροφη της f.
γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες C_1, C_2.



Με δεδομένα ότι
- η μία από τις δύο καμπύλες αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της f και η άλλη στην γραφική παράσταση της f^{-1},
- $\int_{-1/2}^{0}f^{-1}(x)dx=\alpha$

Να βρείτε:
i. Ποια καμπύλη παριστάνει την γραφική παράσταση της f και ποια την γραφική παράσταση της f^{-1},
ii. Το πρόσημο του α καθώς και το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 f(x)dx$ συναρτήσει του α.

Λύση

α) Είναι $f(0)=-\dfrac{1}{2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=1$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A=[0,+\infty)$, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f(A)=\left[f(0),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$.

β) Για κάθε $x\geq 0$ και $y\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$ είναι: $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}=y\Leftrightarrow y\sqrt{x}+2y=\sqrt{x}-1\Leftrightarrow$

$y\sqrt{x}-\sqrt{x}=-2y-1\Leftrightarrow\sqrt{x}(y-1)=-(2y+1)\Leftrightarrow\sqrt{x}=\dfrac{-(2y+1)}{y-1}\Leftrightarrow x=\left(\dfrac{2y+1}{1-y}\right)^2$, άρα

$f^{-1}(y)=\left(\dfrac{2y+1}{1-y}\right)^2, y\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$, οπότε $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{2x+1}{1-x}\right)^2, x\in\left[-\dfrac{1}{2},1\right)$.

γ) i. Επειδή η f έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$, η C_1 παριστάνει τη γραφική της παράσταση, οπότε η C_2 παριστάνει τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

ii. Είναι $f^{-1}(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=-\dfrac{1}{2}$, οπότε

$\int_{-1/2}^{0}f^{-1}(x)dx>0\Leftrightarrow\alpha>0$.

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u\Leftrightarrow x=f(u)$ και $dx=f'(u)du$. Για $x=-\dfrac{1}{2}$ είναι $f(u)=-\dfrac{1}{2}=f(0)\Leftrightarrow u=0$ και για

$x=0$ είναι $f(u)=0=f(1)\Leftrightarrow u=1$.

Είναι $\int_{-1/2}^{0} f^{-1}(x)dx=\alpha \Leftrightarrow \int_0^1 uf'(u)du=\alpha \Leftrightarrow \left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=\alpha \Leftrightarrow$

$f(1)-I=\alpha \Leftrightarrow -I=\alpha \Leftrightarrow I=-\alpha$.

27668. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-\lambda)(x-1),\ x\in\mathbb{R}$ με $1<\lambda<3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x)=-f(4-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=(x-\lambda)(x-1)+(x-3)(x-1)+(x-3)(x-\lambda)\Leftrightarrow$

$f'(x)=x^2-x-\lambda x+\lambda+x^2-3x-x+3+x^2-\lambda x-3x+3\lambda \Leftrightarrow f'(x)=3x^2-2(\lambda+4)x+4\lambda+3$

Η f΄ είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=4(\lambda+4)^2-12(4\lambda+3)=4(\lambda^2+8\lambda+16-12\lambda-9)=4(\lambda^2-4\lambda+7)$

Το τριώνυμο $\lambda^2-4\lambda+7$ έχει διακρίνουσα αρνητική, άρα $\Delta=4(\lambda^2-4\lambda+7)>0$ για κάθε $\lambda\in(1,3)$, οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

β) Έστω x_1,x_2 οι ρίζες της f΄με $x_1<x_2$, τότε για κάθε $x\in(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty,x_1]$, $[x_2,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτά.

Για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(x_1)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(x_2)$.

Η f΄είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=6x-2(\lambda+4)$.

Είναι $f''(x)\geq 0\Leftrightarrow 6x\geq 2(\lambda+4)\Leftrightarrow x\geq \frac{\lambda+4}{3}$.

Για κάθε $x<\frac{\lambda+4}{3}$ είναι $f''(x)<0$ και για κάθε $x>\frac{\lambda+4}{3}$ είναι $f''(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κοίλη στο $\left(-\infty,\frac{\lambda+4}{3}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{\lambda+4}{3},+\infty\right)$, οπότε έχει σημείο καμπής το $\left(\frac{\lambda+4}{3},f\left(\frac{\lambda+4}{3}\right)\right)$.

γ) Είναι $\int_1^3 f(x)dx=-\int_1^3 f(4-x)dx$.

Θέτουμε $4-x=u\Leftrightarrow x=4-u$, $dx=-du$. Για x=1 είναι u=3 και για x= 3 είναι u = 1, οπότε

$\int_1^3 f(x)dx=\int_3^1 f(u)du \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx=-\int_1^3 f(x)dx \Leftrightarrow 2\int_1^3 f(x)dx=0 \Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx=0$.

31551. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\frac{\eta\mu x}{x}, & x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]\\ 1, & x=0\end{cases}$

και $\varphi(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in[-\pi,\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi,\pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in(-\pi,\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^\kappa \varphi(x)dx=0$.

Λύση

α) Για κάθε $x\in(-\pi,\pi)$ είναι $\varphi'(x)=\text{συν}x-x\text{ημ}x-\text{συν}x=-x\text{ημ}x$.
Αν $x\in(-\pi,0)$ είναι $\text{ημ}x<0\Rightarrow x\text{ημ}x>0\Rightarrow\varphi'(x)<0$.
Αν $x\in(0,\pi)$ είναι $\text{ημ}x>0\Rightarrow x\text{ημ}x>0\Rightarrow\varphi'(x)<0$. Επειδή η φ είναι συνεχής στο [-π, π], είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{ημ}x}{x}=1=f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο x = 0.

Για κάθε $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$ είναι $f'(x)=\frac{x\text{συν}x-\text{ημ}x}{x^2}=\frac{\varphi(x)}{x^2}$.
Για κάθε $-\pi<x<0$ επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $\varphi(x)>\varphi(0)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [-π, 0], είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
Για κάθε $0<x<\pi$ επειδή η φ είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $\varphi(x)<\varphi(0)=0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [0,π], είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
Η f έχει τοπικά ελάχιστα τα $f(-\pi)=0=f(\pi)$ και μέγιστο το $f(0)=1$.

γ) Αν $\kappa\in(-\pi,0)$ τότε $\varphi(x)>0$ οπότε και $\int_\kappa^0\varphi(x)dx>0\Leftrightarrow-\int_0^\kappa\varphi(x)dx>0\Leftrightarrow\int_0^\kappa\varphi(x)dx<0$.

Αν $\kappa\in(0,\pi)$ τότε $\varphi(x)<0$ οπότε και $\int_0^\kappa\varphi(x)dx<0$. Προφανώς αν κ = 0 τότε $\int_0^\kappa\varphi(x)dx=0$.

Επομένως κ = 0.

32225. Για μια συνεχή συνάρτηση $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x)+x)^2=x^2(x+1)$, για κάθε $x\in[-1,+\infty)$,
- $f(1)>-1$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}$.

α) Αν $g(x)=f(x)+x$, $x\in[-1,+\infty)$ τότε
i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x)=0$.
ii. Να αποδείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.
β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right)$, $x\geq-1$.
γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x)=f(x+1)-f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι $\int_{2023}^{2024}(f(x+1)-f(x))dx<\int_{2023}^{2024}(f(x+2)-f(x+1))dx$.

Λύση

α) i. $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)+x=0\Leftrightarrow x^2(x+1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$.

ii. Για κάθε $x\in(-1,0)$ είναι $g(x)\neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,0)$. Είναι $g\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$, άρα $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$.
Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $g(x)\neq 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$.
Είναι $g(1)=f(1)+1>-1+1=0$, άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

β) Για κάθε $x \in [-1,+\infty)$ είναι $\left(f(x)+x\right)^2 = x^2(x+1) \Leftrightarrow g^2(x) = x^2(x+1) \Leftrightarrow |g(x)| = \sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x+1} \Leftrightarrow$
$|g(x)| = |x|\cdot\sqrt{x+1}$ (1).
Αν $x \in (-1,0)$ είναι $g(x)<0$, οπότε η (1) γίνεται $-g(x) = -x\sqrt{x+1} \Leftrightarrow g(x) = x\sqrt{x+1}$ και αν $x>0$ η (1) γίνεται $g(x) = x\sqrt{x+1}$. Άρα $g(x) = \begin{cases} x\sqrt{x+1}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} = x\sqrt{x+1},\ x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)+x = x\sqrt{x+1} \Leftrightarrow$
$f(x) = x\sqrt{x+1} - x\left(\sqrt{x+1}-1\right),\ x\in\mathbb{R}$.

γ) Αν η f είναι κυρτή τότε η f ΄είναι γνησίως αύξουσα.
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $h'(x) = f'(x+1) - f'(x)$.
Είναι $x+1>x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x+1) > f'(x) \Leftrightarrow h'(x)>0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε x > - 1 είναι
$x < x+1 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(x+1) \Leftrightarrow f(x+1)-f(x) < f(x+2)-f(x+1)$, οπότε
$\int_{2023}^{2024}\left(f(x+1)-f(x)\right)dx < \int_{2023}^{2024}\left(f(x+2)-f(x+1)\right)dx$.

33578.α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει $e^x + \eta\mu x \geq 1$.
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - \ln\left(e^x + \eta\mu x\right)$, $x\in[0,\pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x}$, $x\in[0,\pi]$.
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi x f'(x)dx = \dfrac{\pi}{e^\pi}$.
δ) Να αποδείξτε ότι $\int_1^e \dfrac{1}{\left(e^x+\eta\mu x\right)\cdot x}dx < 1$.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x \geq x+1$ (1).
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq \eta\mu x \leq |x|$ και για $x\in[0,\pi]$ είναι
$-x \leq \eta\mu x \leq x \Rightarrow x \geq -\eta\mu x \Leftrightarrow x+1 \geq -\eta\mu x + 1$, οπότε η (1) γίνεται $e^x \geq x+1 \geq -\eta\mu x + 1 \Rightarrow e^x + \eta\mu x \geq 1$.

β) $H'(x) = \left(x - \ln\left(e^x+\eta\mu x\right)\right)' = 1 - \dfrac{\left(e^x+\eta\mu x\right)'}{e^x+\eta\mu x} \Leftrightarrow$
$H'(x) = \dfrac{\cancel{e^x} + \eta\mu x - \cancel{e^x} - \sigma\upsilon\nu x}{e^x+\eta\mu x} = f(x)$, άρα η H είναι μια αρχική της f.

γ) $\int_0^\pi x f'(x)dx = \left[x f(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi f(x)dx = \pi f(\pi) - \left[H(x)\right]_0^\pi \Leftrightarrow$
$\int_0^\pi x f'(x)dx = \dfrac{\pi}{e^\pi} - H(\pi) + H(0) = \dfrac{\pi}{e^\pi} - 0 + 0 = \dfrac{\pi}{e^\pi}$.

δ) Για κάθε $x\in(0,\pi]$ είναι $e^x+\eta\mu x > 1 \Leftrightarrow x\left(e^x+\eta\mu x\right) > x \Leftrightarrow \dfrac{1}{x\left(e^x+\eta\mu x\right)} < \dfrac{1}{x}$ άρα
$\int_1^e \dfrac{1}{\left(e^x+\eta\mu x\right)\cdot x}dx < \int_1^e \dfrac{1}{x}dx = \left[\ln x\right]_1^e = 1$.

35245. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης.
γ) Να αποδείξετε ότι:
i. $f'(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
ii. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει: $0<f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Είναι $f''(x)=\left(\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\dfrac{3}{\cancel{2}}\left(x^2+1\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot\cancel{2}x=-\dfrac{3x}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)>0$ και για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $(0,f(0))$.

γ) i. Επειδή η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$, η f ΄είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Η f ΄ έχει μέγιστο το $f'(0)=1$, οπότε $f'(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Είναι $\alpha<\alpha+1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha)<f(\alpha+1)\Leftrightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)>0$.

Είναι $f(\alpha+1)-f(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha+1}f'(x)dx$.

Είναι $f'(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0, οπότε $\int_{\alpha}^{\alpha+1}f'(x)dx<\int_{\alpha}^{\alpha+1}1dx\Leftrightarrow$

$\int_{\alpha}^{\alpha+1}f'(x)dx<\alpha+1-\alpha\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\alpha+1}f'(x)dx<1\Leftrightarrow f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$.

36816. Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει $xf(x)=\eta\mu x$ για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $f(0)$.
β) Να βρείτε τον τύπο της f.
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
δ) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx\le\dfrac{1}{4}$.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $xf(x)=\eta\mu x\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, ισχύει ότι $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ημx}{x}, & x\in\left(0,\dfrac{π}{2}\right)\\ 1, & x=0\end{cases}$.

γ) Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{π}{2}\right)$ είναι $f'(x)=\dfrac{xσυνx-ημx}{x^2}$.

Έστω $φ(x)=xσυνx-ημx,\ x\in\left[0,\dfrac{π}{2}\right]$. Είναι $φ'(x)=συνx-xημx-συνx=-xημx<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{π}{2}\right)$ και επειδή η φ είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{π}{2}\right]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $0<x<\dfrac{π}{2}\overset{φ\searrow}{\Leftrightarrow}φ(0)>φ(x)>φ\left(\dfrac{π}{2}\right)\Rightarrow φ(x)<0$, άρα $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{π}{2}\right)$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

δ) Για κάθε $\dfrac{π}{6}\le x\le\dfrac{π}{4}\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f\left(\dfrac{π}{6}\right)\ge f(x)\ge f\left(\dfrac{π}{4}\right)\Leftrightarrow\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{π}{4}}\le f(x)\le\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{π}{6}}\Leftrightarrow$

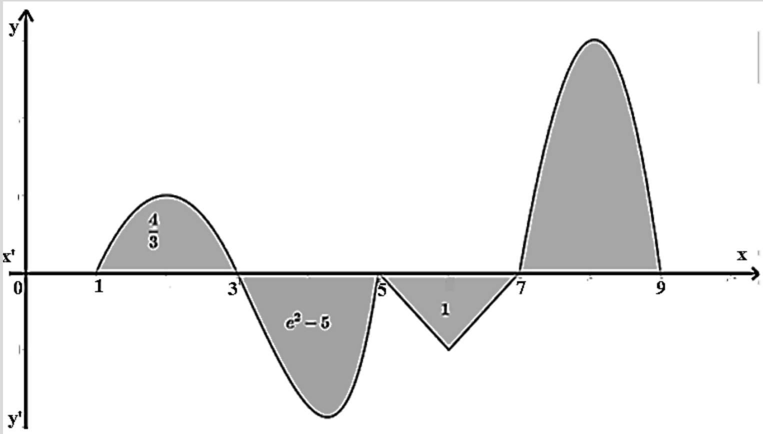
$\dfrac{2\sqrt{2}}{π}\le f(x)\le\dfrac{3}{π}$ άρα $\int_{π/6}^{π/4}\dfrac{2\sqrt{2}}{π}dx\le\int_{π/6}^{π/4}f(x)dx\le\int_{π/6}^{π/4}\dfrac{3}{π}dx\Leftrightarrow$

$\dfrac{2\sqrt{2}}{π}\left(\dfrac{π}{4}-\dfrac{π}{6}\right)\le\int_{π/6}^{π/4}f(x)dx\le\dfrac{3}{π}\left(\dfrac{π}{4}-\dfrac{π}{6}\right)\Leftrightarrow$

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Θέμα 2ο

32800.Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,9]\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x\in[1,7]$.



Δίνονται ακόμη ότι:

- $\left(\int_7^9 f(x)dx\right)^2 = 16$ και
- η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες $1,\ 3,\ 5,\ 7$.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x)dx = 4$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x\in[1,9]$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x)dx$.

Λύση

α) Επειδή $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[7,9]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 7 και x = 9, είναι $\int_7^9 f(x)dx>0$, οπότε $\left(\int_7^9 f(x)dx\right)^2 = 16 = 4^2 \Leftrightarrow \int_7^9 f(x)dx = 4$.

β) $E(\Omega)=\frac{4}{3}+\left(e^2-5\right)+1+\int_7^9 f(x)dx=\frac{4}{3}+e^2-5+1+4=\frac{3e^2+4}{3}$.

γ) $\int_1^9 f(x)dx=\frac{4}{3}-\left(e^2-5\right)-1+\int_7^9 f(x)dx=\frac{4}{3}-e^2+5-1+4=\frac{28-3e^2}{3}$.

36838.Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g.

Αν $\int_1^3 f(x)dx=6$, $\int_1^8 f(x)dx=29$, $\int_3^5 f(x)dx=8$ και $\int_1^5 g(x)dx=-6$, τότε:

α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_3^8 f(x)dx$

ii. $\int_5^8 2f(x)dx$

iii. $\int_1^5 \left(f(x)+g(x)\right)dx$

Λύση

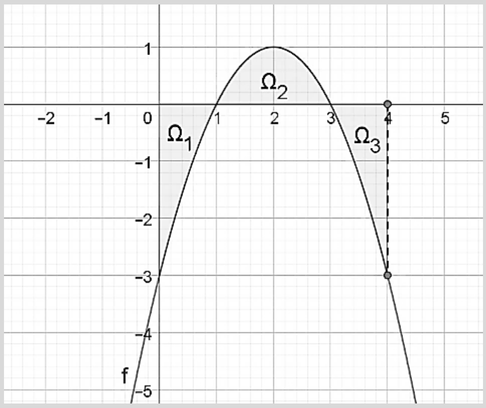
α) i. $\int_3^8 f(x)dx = \int_3^1 f(x)dx + \int_1^8 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx + \int_1^8 f(x)dx = -6+29=23$

ii. $\int_5^8 2f(x)dx = 2\left(\int_5^3 f(x)dx + \int_3^8 f(x)dx\right) = 2\left(-\int_3^5 f(x)dx + 23\right) = 2(-8+23)=30$

iii. $\int_1^5 (f(x)+g(x))dx = \int_1^5 f(x)dx + \int_1^5 g(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx - 6 = 6+8-6=8$

β) Είναι $E = -\int_1^5 g(x)dx = 6$ τ.μ.

33588.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)=E(\Omega_3)=\frac{4}{3}$.



α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 f(x)dx$

ii. $\int_0^3 f(x)dx$

iii. $\int_0^4 f(x)dx$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\int_0^{2023} f(x)dx - \int_4^{2023} f(x)dx$.

Λύση

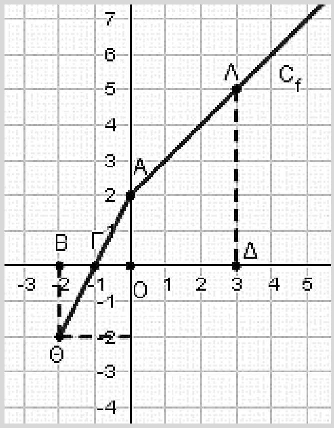
α) i. $\int_0^1 f(x)dx = -E(\Omega_1) = -\frac{4}{3}$

ii. $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = -\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=0$

iii. $\int_0^4 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx = 0 - E(\Omega_3) = -\frac{4}{3}$

β) $\int_0^{2023} f(x)dx - \int_4^{2023} f(x)dx = \int_0^{2023} f(x)dx + \int_{2023}^{4} f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx = -\frac{4}{3}$

36837.Στο παρακάτω σχήμα η τεθλασμένη γραμμή ΘΑΛ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, που διέρχεται από το σημείο Α(0,2) και τέμνει τον άξονα x΄x στο Γ(-1,0).



α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ **ii.** $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ **iii.** $\int_{0}^{3} f(x)dx$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-2$ και $x=3$.

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[1,5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=5$.

Λύση

α) i. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx = -(ΘΒΓ) = -\frac{1}{2}(ΒΓ)(ΘΒ) = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = -1$.

ii. $\int_{-1}^{0} f(x)dx = (ΑΟΓ) = \frac{1}{2}(ΟΓ)(ΑΟ) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$.

iii. $\int_{0}^{3} f(x)dx = (ΑΟΔΛ) = \frac{((ΑΟ)+(ΔΛ))\cdot(ΟΔ)}{2} = \frac{(2+5)\cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$.

β) $Ε = \int_{-2}^{-1}|f(x)|dx + \int_{-1}^{3}|f(x)|dx = -\int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx = 1+1+\frac{21}{2} = \frac{25}{2}$

36849.Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2, & αν\ x\le 0 \\ 1-συνx, & αν\ x>0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα x΄x και των ευθειών x = -2 και x = π.

Λύση

α) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0 = f(0)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(1-συνx) = 0$.

Επειδή $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ η f είναι συνεχής στο 0.

β) Επειδή $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[-2,\pi]$, είναι

$$Ε = \int_{-2}^{\pi} f(x)dx = \int_{-2}^{0} x^2dx + \int_{0}^{\pi}(1-συνx)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + [x-ημx]_0^{\pi} = \frac{8}{3}+\pi$$

Θέμα 4ο

23218. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3+3x^2-\lambda x+1$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής Κ.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

γ) Έστω ότι $K(-1,\lambda+3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2, με $x_1<-1<x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_P στο σημείο K και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x=x_1, x=-1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x=x_2$, $x=-1$.

Λύση

α) Η P είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $P'(x)=3x^2+6x-\lambda$.

Η P ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $P''(x)=6x+6$.

Είναι $P''(x)\geq 0\Leftrightarrow 6x+6\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1$.

Για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ είναι $P''(x)<0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ είναι κοίλη στο διάστημα αυτό. Για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ είναι $P''(x)>0$ και επειδή η P είναι συνεχής στο $[-1,+\infty)$ είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Η P έχει σημείο καμπής το $K(-1,P(-1))$ ή $(-1,3+\lambda)$.

β) Η P' είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=36+12\lambda$.

Αν $\Delta<0\Leftrightarrow 36+12\lambda<0\Leftrightarrow 12\lambda<-36\Leftrightarrow\lambda<-3$ τότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $P'(x)>0$, οπότε η P είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

Αν $\Delta=0\Leftrightarrow 36+12\lambda=0\Leftrightarrow 12\lambda=-36\Leftrightarrow\lambda=-3$ τότε $P'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2>0$ για κάθε $x\neq-1$ και επειδή η P είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα. Αν $\Delta>0\Leftrightarrow 36+12\lambda>0\Leftrightarrow 12\lambda>-36\Leftrightarrow\lambda>-3$ τότε η P ΄ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<x_2$ και αφού α = 3>0 το πρόσημο της P ΄και η μονοτονία της P φαίνεται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
P ΄	+	0	−	0	+
P	↗		↘		↗

Άρα για λ > - 3 η P έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1=\dfrac{-6-\sqrt{12\lambda+36}}{6}$ και τοπικό ελάχιστο στο

$x_1=\dfrac{-6+\sqrt{12\lambda+36}}{6}$.

γ) i. Αφού η P παρουσιάζει τοπικά ακρότατα είναι λ >–3 . Η εφαπτομένη της C_P στο Κ έχει εξίσωση

ε: $y-P(-1)=P'(-1)(x+1)$ $y-(\lambda+3)=(-3-\lambda)(x+1)\Leftrightarrow y=(-3-\lambda)x$

Επειδή λ > - 3 είναι $(-3-\lambda)<0$ και επειδή διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Επειδή η P είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$ βρίσκεται κάτω από την ε στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\leq-1$ είναι $P(x)\leq(-3-\lambda)x$.

Επειδή η P είναι κυρτή στο $[-1,+\infty)$, βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους άρα για κάθε $x\ge -1$ είναι $P(x)\ge(-3-\lambda)x$.

$$E_1=\int_{x_1}^{-1}\left((-3-\lambda)x-P(x)\right)dx=\int_{x_1}^{-1}\left((-3-\lambda)x-\left(x^3+3x^2-\lambda x+1\right)\right)dx=$$

$$\int_{x_1}^{-1}\left((-3-\lambda)x-x^3-3x^2+\lambda x-1\right)dx=$$

$$\int_{x_1}^{-1}\left(-x^3-3x^2-3x-1\right)dx=-\int_{x_1}^{-1}(x+1)^3dx=-\left[\frac{(x+1)^4}{4}\right]_{x_1}^{-1}=\frac{(x_1+1)^4}{4}$$

$$E_2=\int_{-1}^{x_2}\left(P(x)-(-3-\lambda)x\right)dx=\int_{-1}^{x_2}\left(\left(x^3+3x^2-\lambda x+1\right)-(-3-\lambda)x\right)dx=$$

$$\int_{-1}^{x_2}\left(x^3+3x^2+3x+1\right)dx=\int_{-1}^{x_2}(x+1)^3dx==\frac{(x_2+1)^4}{4}$$

$$E_1=E_2\Leftrightarrow\frac{(x_1+1)^4}{4}=\frac{(x_2+1)^4}{4}\Leftrightarrow(x_1+1)^4=(x_2+1)^4\Leftrightarrow$$

$\left(x_1+1=x_2+1\Leftrightarrow x_1=x_2\ \text{αδύνατο}\right)$ ή $\left(x_1+1=-x_2-1\Leftrightarrow x_1+x_2=-2\ (1)\right)$

Επειδή τα x_1,x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $P'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+6x-\lambda=0$, από τους τύπους Vieta είναι

$x_1+x_2=-\dfrac{6}{3}=-2$, άρα η (1) είναι αληθής.

24275. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{e^x},x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ, η οποία είναι μεγαλύτερη του 1.

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1,\ x=\rho$ ισούται με

$E(\Omega)=-\dfrac{(\rho-1)^2}{2}-(\rho-1)+e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{e^x}\Leftrightarrow f(x)+x-1=e^{-x}$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$, οπότε η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-1-e^{-x}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(1)=-1+1+\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}>0$, $f(2)=-2+1+\dfrac{1}{e^2}=-1+\dfrac{1}{e^2}<0$, δηλαδή $f(1)f(2)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο [1,2], σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\rho\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=0$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα το ρ είναι μοναδικό και επειδή επιπλέον $\rho\in(1,2)$ είναι $\rho>1$.

γ) Για κάθε $x\in(1,\rho)$ είναι $f(x)>f(\rho)=0$. Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega)=\int_1^\rho f(x)dx=\int_1^\rho\left(-x+1+e^{-x}\right)dx=\left[-\frac{x^2}{2}+x-e^{-x}\right]_1^\rho \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=-\frac{\rho^2}{2}+\rho-e^{-\rho}+\frac{1}{2}-1+e^{-1}=-\frac{\rho^2-2\rho+1}{2}-e^{-\rho}+e^{-1}\Leftrightarrow\ E(\Omega)=-\frac{(\rho-1)^2}{2}-e^{-\rho}+e^{-1}\ (1)$$

Είναι $f(\rho)=0\Leftrightarrow -\rho+1+e^{-\rho}=0\Leftrightarrow e^{-\rho}=\rho-1$, οπότε η (1) γίνεται:

$E(\Omega)=-\frac{(\rho-1)^2}{2}-(\rho-1)+e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες.

24704. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^x$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=e+(x_0-1)(1-\ln x_0)$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1}{x}+e^x$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x+e^x\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)=e$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f((0,1))=(-\infty,e)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f((0,1))$, υπάρχει μοναδικό λόγω μονοτονία ς $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$. Επομένως η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

γ) Είναι $x_0\le x\le 1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_0)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow 0\le f(x)\le e$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_{x_0}^1 f(x)dx=\int_{x_0}^1\left(\ln x+e^x\right)dx=\int_{x_0}^1 \ln x(x)'dx+\left[e^x\right]_{x_0}^1\Leftrightarrow$

$$E=\left[x\ln x\right]_{x_0}^1-\int_{x_0}^1 x\cdot\frac{1}{x}dx+e-e^{x_0}=-x_0\ln x_0-1+x_0+e-e^{x_0}\ \ (1)$$

Είναι $f(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0+e^{x_0}=0\Leftrightarrow \ln x_0=-e^{x_0}$, οπότε η (1) γίνεται:

$$E=-x_0\ln x_0-1+x_0+e+\ln x_0=e+(x_0-1)-\ln x_0(x_0-1)\Leftrightarrow E=e+(x_0-1)(1-\ln x_0)$$

25147. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=f(x)\eta\mu x$, $x\in[0,2\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0,2\pi]$.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f,C_g.

Λύση

α) Είναι $f(x)=g(x) \Leftrightarrow e^{-x}=e^{-x}\eta\mu x \Leftrightarrow \eta\mu x=1 \overset{x\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{2}$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0,2\pi]$.

β) Είναι $f'(x)=-e^{-x}$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}$ και $g'(x)=f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x$, άρα $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο Α.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|f(x)(1-\eta\mu x)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|e^{-x}(1-\eta\mu x)\right|dx \Leftrightarrow$$

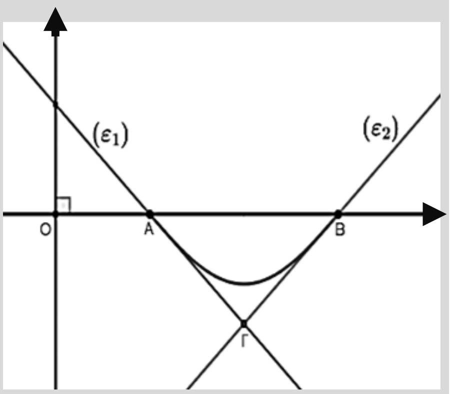
$$E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}(1-\eta\mu x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\eta\mu x dx \quad (1).$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\eta\mu x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-x}\right)'\eta\mu x dx=e^{-\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\sigma\upsilon\nu x dx=$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-x}\right)'\sigma\upsilon\nu x dx=e^{-\frac{\pi}{2}}+\left[e^{-x}\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\eta\mu x dx \Leftrightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\eta\mu x dx=-e^{-\frac{\pi}{2}}+1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\eta\mu x dx=\frac{-e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{2}$$, οπότε η (1) γίνεται $E=-e^{-\frac{\pi}{2}}+1-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}-1}{2}=\frac{1-e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$ τ.μ.

25235. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2},f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών (ε_1), (ε_2) είναι $(\varepsilon_1): y=-x+\frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y=x-\frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{f(x)+x-\frac{\pi}{2}}$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ με $f'(x)=-\eta\mu x$.

Είναι $(\varepsilon_1): y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y=-x+\frac{\pi}{2}$ και

$(\varepsilon_2): y-f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y=\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow y=x-\frac{3\pi}{2}$

β) Για τις συντεταγμένες του σημείου τομής Γ των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$, έχουμε: $\begin{cases} y=-x+\frac{\pi}{2} \\ y=x-\frac{3\pi}{2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 2y=-\pi \Leftrightarrow y=-\frac{\pi}{2}$

και $-\frac{\pi}{2}=x-\frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x=\pi$, άρα $\Gamma\left(\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδό

$(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}(\text{ΑΒ})|y_\Gamma|=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω_1 που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα x΄x είναι $E(\Omega_1)=-\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\text{συν}x\,dx=-[\text{ημ}x]_{\pi/2}^{3\pi/2}=-(-1-1)=2$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E(\Omega)=(\text{ΑΒΓ})-E(\Omega_1)=\frac{\pi^2}{4}-2$.

γ) Επειδή η f είναι κυρτή στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό, εκτός του σημείου επαφής τους, άρα για κάθε $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ είναι $f(x)>-x+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x)+x-\frac{\pi}{2}>0$.

Ακόμη $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\left(f(x)+x-\frac{\pi}{2}\right)=0$, οπότε αν θέσουμε $f(x)+x-\frac{\pi}{2}=u$, προκύπτει ότι

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{f(x)+x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u}=+\infty$.

25259. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f, να εφάπτεται της $\varepsilon: y=\frac{1}{4}$, στο $x_0=0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1)=1$.

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0)=\frac{1}{4}$ και $f'(0)=0$. **ii.** $\lim_{x\to 0}\frac{4f(x)-1}{\text{ημ}x\cdot f(x)}=0$.

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f', τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

Λύση

α) i. Επειδή το σημείο $A(0,f(0))$ ανήκει στην ευθεία ε, είναι $f(0)=\frac{1}{4}$.

Επειδή η ε εφάπτεται της C_f στο Α, είναι $f'(0)=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(0)=0$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(x)-1}{\eta\mu x\cdot f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\left(f(x)-\frac{1}{4}\right)}{\eta\mu x\cdot f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{\eta\mu x}{x}\cdot f(x)}=\dfrac{4f'(0)}{1\cdot f(0)}=0.$

β) i. Επειδή η f είναι κυρτή, η f΄ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για κάθε $0\le x\le 1$ είναι $f'(x)\ge f'(0)=0$.

ii. Επειδή η f ΄είναι γνησίως αύξουσα είναι και 1-1, οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow x=0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ τ.μ.

25746.Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f'(x)>f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x<0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x|+1)=f(|x|+1)$.

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $E<f(1)$.

Λύση

α) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)=e^{-x}\left(f'(x)-f(x)\right)$.

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>f(x)$, είναι $g'(x)>0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x<0$ είναι $g(x)<g(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)<f(0)\Leftrightarrow f(x)<0$ και για κάθε $x>0$ είναι $g(x)>g(0)\Leftrightarrow e^{-x}f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$.

γ) Για κάθε x > 0 είναι $f'(x)>f(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, οπότε είναι και 1-1 στο $[0,+\infty)$.

Είναι $|\eta\mu x|+1>0, |x|+1>0$, οπότε $f\left(|\eta\mu x|+1\right)=f\left(|x|+1\right)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}|\eta\mu x|+1=|x|+1\Leftrightarrow|\eta\mu x|=|x|\Leftrightarrow x=0$.

δ) Επειδή για κάθε $x\ge 0$ είναι $f(x)\ge 0$ και η f είναι συνεχής, το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E=\int_0^1 f(x)dx$.

Είναι $f'(x)>f(x)\Rightarrow\int_0^1 f'(x)dx>\int_0^1 f(x)dx\Leftrightarrow E<f(1)-f(0)\Leftrightarrow E<f(1)$.

25747.Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot f'(x)=-x+1$, για κάθε $x\in(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=-x^2+2x$ για κάθε $x\in[0,2]$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$ για κάθε $x\in[0,2]$.

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο K(1,0) και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$.

Λύση

α) Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f(x)f'(x) = -x+1 \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = -2x+2 \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(-x^2+2x\right)' \Leftrightarrow$
$f^2(x) = -x^2+2x+c,\ c \in \mathbb{R}$.

Για x = 1 είναι $f^2(1) = -1+2+c \Leftrightarrow 1 = 1+c \Leftrightarrow c = 0$, οπότε $f^2(x) = -x^2+2x$ για κάθε $x \in (0,2)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, είναι συνεχής και στα $x_1 = 0,\ x_2 = 2$, οπότε

$\lim\limits_{x \to 0^+} f^2(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(-x^2+2x\right) \Leftrightarrow f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ και

$\lim\limits_{x \to 2^-} f^2(x) = \lim\limits_{x \to 2^-}\left(-x^2+2x\right) \Leftrightarrow f^2(2) = 0 \Leftrightarrow f(2) = 0$.

Τελικά $f^2(x) = \begin{cases} -x^2+2x, & x \in (0,2) \\ 0, & x = 0 \text{ ή } x = 2 \end{cases} = -x^2+2x,\ x \in [0,2]$

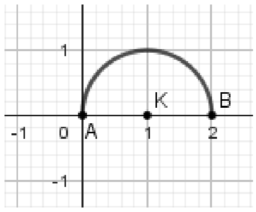
β) Για κάθε $x \in [0,2]$ είναι $f^2(x) = -x^2+2x \Leftrightarrow |f(x)| = \sqrt{-x^2+2x}$ (1)

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x} = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x = 0 \Leftrightarrow x(-x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f(x) \neq 0$ και επειδή η f είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό. Επειδή $f(1) = 1$, είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$, οπότε η (1) γίνεται $f(x) = \sqrt{-x^2+2x}$.

Άρα $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x^2+2x}, & x \in (0,2) \\ 0, & x = 0 \text{ ή } x = 2 \end{cases} = \sqrt{-x^2+2x},\ x \in [0,2]$.

γ) Είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x} = y,\ y \geq 0$, οπότε $-x^2+2x = y^2 \Leftrightarrow$
$x^2-2x+y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 1$. Η γραφική παράσταση της f είναι το ημικύκλιο με κέντρο K(1,0) και ακτίνα 1 που βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, μαζί με τα σημεία A και B.



δ) Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι το εμβαδό του προηγούμενου ημικυκλίου, οπότε

$\int_0^2 f(x)dx = \dfrac{\pi\rho^2}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ τ.μ.

25757.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (1-x)\eta\mu^2\left(\dfrac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in [0,1]$, ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1-x$.

γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0,\ x = 1$ ισχύει $E < \dfrac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

Λύση

α) Στο διάστημα $[0,1)$ η f είναι συνεχής ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Για κάθε $x \in [0,1)$ είναι $0 \leq \eta\mu^2\left(\dfrac{1}{1-x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq (1-x)\eta\mu^2\left(\dfrac{1}{1-x}\right) \leq 1-x$.

Επειδή $\lim\limits_{x \to 1^-}(1-x) = 0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 = f(0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο [0,1].

β) Στο προηγούμενο σκέλος δείξαμε ότι για κάθε $x \in [0,1)$ είναι

$0 \le (1-x)\eta\mu^2\left(\frac{1}{1-x}\right) \le 1-x \Leftrightarrow 0 \le f(x) \le 1-x$. Επειδή για x = 1 είναι $f(1)=0$ και $0 \le f(0) \le 1-1$, η σχέση $0 \le f(x) \le 1-x$ αληθεύει για κάθε $x \in [0,1]$.

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,1] και $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E = \int_0^1 f(x)dx$.

Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) \le 1-x$ και η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$, οπότε

$$\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 (1-x)dx \Leftrightarrow E < \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow E < \frac{1}{2}.$$

25765.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + x,\ x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$.

γ) Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x) = e^{f(|x|)}$ για κάθε $x \ne 0$.

i.Να αποδείξετε ότι $g(x) = x^2e^{|x|},\ x \in \mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-1,\ x=1$.

Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \frac{2}{x} + 1$.

Για κάθε x >0 είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται. Είναι $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}(2\ln x + x) = -\infty + 0 = -\infty$ και

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2\ln x + x) = +\infty + \infty = +\infty$. Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$.

β) Επειδή η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A) = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $D_f = (0,+\infty)$, έχουμε:

Αν $x \le 0$ τότε η ανίσωση $f^{-1}(x) > x$ είναι αληθής. Αν x> 0 τότε

$$f^{-1}(x) > x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f\left(f^{-1}(x)\right) > f(x) \Leftrightarrow f(x) < x \Leftrightarrow 2\ln x + x < x \Leftrightarrow 2\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x < 1$.

γ) i. Η συνάρτηση $f(|x|)$ ορίζεται όταν $|x| > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$, τότε $f(|x|) = 2\ln|x| + |x|$ και

$$g(x) = e^{f(|x|)} = e^{2\ln|x|+|x|} = e^{\ln x^2} \cdot e^{|x|} = x^2e^{|x|},\ x \ne 0.$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε $g(0) = \lim_{x\to0} x^2e^{|x|} = 0$, οπότε

$$g(x) = \begin{cases} x^2e^{|x|}, & x \ne 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} = x^2e^{|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

ii. $E(\Omega) = \int_{-1}^1 |g(x)|dx = \int_{-1}^1 x^2e^{|x|}dx = \int_{-1}^0 x^2e^{-x}dx + \int_0^1 x^2e^x dx \Leftrightarrow$

$$E(\Omega)=\left[-x^2e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}2xe^{-x}dx+\left[x^2e^{x}\right]_0^1-\int_0^1 2xe^{x}dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=e+\left[-2xe^{-x}\right]_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}2e^{-x}dx+e-\left[2xe^{x}\right]_0^1+\int_0^1 2e^{x}dx \Leftrightarrow$$

$$E(\Omega)=\cancel{e}-\cancel{2e}-2\left[e^{-x}\right]_{-1}^{0}+\cancel{e}-2e+2\left[e^{x}\right]_0^1=2(e-2)$$

26183. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} εφ\left(\dfrac{πx}{4}\right), 0\le x\le 1 \\ 1-\dfrac{4\ln x}{x},\ x>1\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0,+\infty)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=\dfrac{\ln 4}{π}$ τετραγωνικές μονάδες.

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}εφ\left(\dfrac{πx}{4}\right)=εφ\left(\dfrac{π}{4}\right)=1=f(1)$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\dfrac{4\ln x}{x}\right)=1$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$ η f είναι συνεχής στο 1.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{εφ\left(\dfrac{πx}{4}\right)-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\dfrac{1}{συν^2\left(\dfrac{πx}{4}\right)}\left(\dfrac{πx}{4}\right)'}{1}=\dfrac{\dfrac{π}{4}}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{π}{2}$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-\dfrac{4\ln x}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-4\ln x}{x^2-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-\dfrac{4}{x}}{2x-1}=\dfrac{-4}{1}=-4$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\ne\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Επειδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 που είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, το x=1 είναι κρίσιμο σημείο της f.

Για $x\in(0,1)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=\dfrac{1}{συν^2\left(\dfrac{πx}{4}\right)}\left(\dfrac{πx}{4}\right)'=\dfrac{π}{4συν^2\left(\dfrac{πx}{4}\right)}$. Επειδή για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)>0$, η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο διάστημα αυτό.

Για x > 1 είναι $f'(x)=-4\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow -4\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$.

Επειδή τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη και οι ρίζες της f', η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία τα 1, e.

γ) Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,1] και $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

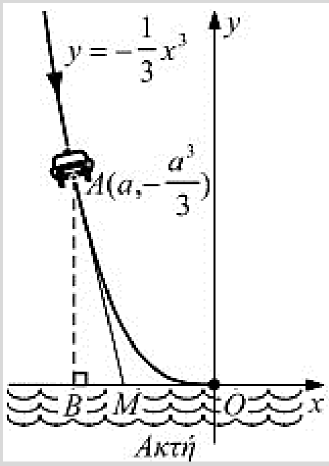
$$E=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 εφ\left(\frac{πx}{4}\right)dx .$$

Θέτουμε $\frac{πx}{4}=u \Leftrightarrow x=\frac{4u}{π}$, άρα $dx=\frac{4}{π}du$. Για x = 0 είναι u=0 και για x=1 είναι u=$\frac{π}{4}$, οπότε

$$E=\frac{4}{π}\int_0^{\frac{π}{4}} εφu du=\frac{4}{π}\int_0^{\frac{π}{4}}\frac{ημu}{συνu}du=-\frac{4}{π}\int_0^{\frac{π}{4}}\frac{(συνu)'}{συνu}du=-\frac{4}{π}\left[\ln(συνu)\right]_0^{\frac{π}{4}} \Leftrightarrow$$

$$E=-\frac{4}{π}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{4}{π}\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{4}{π}\left(-\ln 2^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{2\ln 2}{π} \text{ τ.μ.}$$

27031. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-\frac{1}{3}x^3, με\ x\in(-\infty,0]$ και τυχαίο σημείο $A\left(α,-\frac{α^3}{3}\right)$ με $α<0$ της γραφικής της παράστασης.



α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α.

β) i. Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\frac{1}{3}x^3,\ \ x\le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).
Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $α'(t)=-α(t)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3.

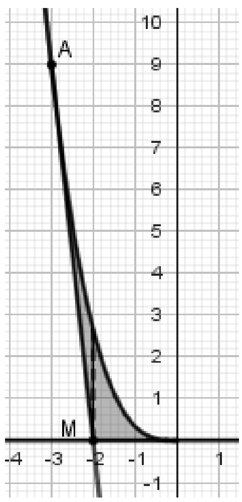
Λύση

α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)$ με $f'(x)=-x^2$.
Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι η ευθεία

$$ε:\ y-f(α)=f'(α)(x-α)\Leftrightarrow y+\frac{α^3}{3}=-α^2(x-α)\Leftrightarrow y=-α^2x+\frac{2α^3}{3}.$$

β) i. Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $α(t_0)=-3$ και $α'(t_0)=-α(t_0)=3$.

ii. Επειδή $α(t)<0$ είναι $α'(t)=-α(t)>0$, δηλαδή η τετμημένη του σημείου Μ αυξάνεται αφού το Μ πλησιάζει το Ο.



γ) Για $α=-3$ η εφαπτομένη έχει εξίσωση

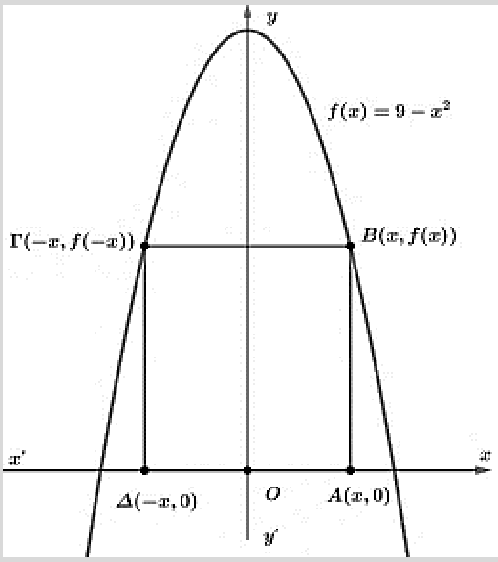
$$ε:\ y=-(-3)^2x+\frac{2\cdot(-3)^3}{3}\Leftrightarrow y=-9x-18.$$

Για y = 0 είναι $-9x-18=0\Leftrightarrow -9x=18\Leftrightarrow x=-2$, άρα $M(-2,0)$.
Το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E(Ω)=\int_{-3}^{-2}\left(-\frac{1}{3}x^3-(-9x-18)\right)dx+\int_{-2}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E(Ω)=\left[-\frac{1}{12}x^4+\frac{9}{2}x^2+18x\right]_{-3}^{-2}+\left[-\frac{1}{12}x^4\right]_{-2}^{0}=...=\frac{9}{4}\text{ τ.μ.}$$

27408. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=9-x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα x΄x είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.
Οι κορυφές Α(x,0) και Δ(-x,0) είναι σημεία του άξονα x ΄x, ενώ οι κορυφές $B(x,f(x))$ και $\Gamma(-x,f(-x))$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x\in[0,3]$ δίνεται από την συνάρτηση $E(x)=18x-2x^3$.

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E(x)$ ως προς την μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα x΄x και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του.

Λύση

α) Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E(x)=(A\Delta)(AB)=2x\cdot f(x)=2x(9-x^2)=18x-2x^3,\ x\in[0,3]$

β) Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο (0,3) με $E'(x)=18-6x^2$.

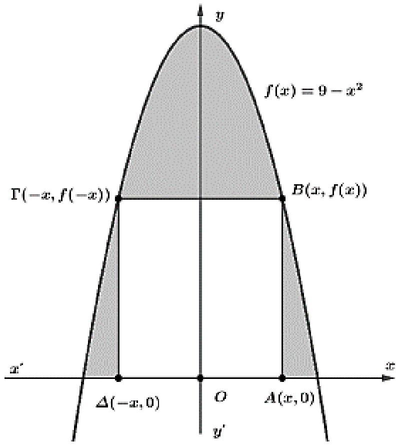
Είναι $E'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 18-6x^2\geq 0 \Leftrightarrow -6x^2\geq -18 \Leftrightarrow x^2\leq 3 \overset{x\in(0,3)}{\Leftrightarrow} x\leq\sqrt{3}$

Για κάθε $x\in(0,\sqrt{3})$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(\sqrt{3},3)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η Ε είναι συνεχής στο [0,3], είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\sqrt{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\sqrt{3},3]$.

γ) Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο για $x=\sqrt{3}$, τότε οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι

$A\Delta=2x=2\sqrt{3}$ και $B\Gamma=f(\sqrt{3})=9-(\sqrt{3})^2=6$. Το μέγιστο εμβαδό είναι

$E(\sqrt{3})=18\sqrt{3}-2(\sqrt{3})^3=18\sqrt{3}-6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.



δ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$E(\Omega)=\int_{-3}^{3}f(x)dx-E(\sqrt{3})=\int_{-3}^{3}(9-x^2)dx-12\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}-12\sqrt{3}\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=27-9+27-9-12\sqrt{3}=36-12\sqrt{3}=12(3-\sqrt{3})$ τ.μ.

28476. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)(x-1)}{\ln x}=0$ και $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ε, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και των ευθειών $x=0$ και $x=1$.

Λύση

α) i. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=1$

ii. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)(x-1)}{\ln x}$, $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$, τότε $f(x)=g(x)\dfrac{\ln x}{x-1}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι συνεχής στο x = 1, άρα

$f(1)=\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)\dfrac{\ln x}{x-1}=0\cdot 1=0$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=\sqrt{x^2+1}>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $f(1)=0$, η x = 1 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Για κάθε $x<1$ είναι $f(x)<f(1)=0$ και για κάθε $x>1$ είναι $f(x)>f(1)=0$.

δ) Επειδή η f είναι συνεχής και $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[0,1]$, το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E=-\int_0^1 f(x)dx=-\int_0^1 (x)'f(x)dx=-\left[xf(x)\right]_0^1+\int_0^1 xf'(x)dx\Leftrightarrow$$

$$E=-f(1)+\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2+1\right)'\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}dx\Leftrightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

28870.Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [-3,2], η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1.
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f,η C_{f} που στο διάστημα (-1,2] είναι ευθύγραμμο τμήμα.

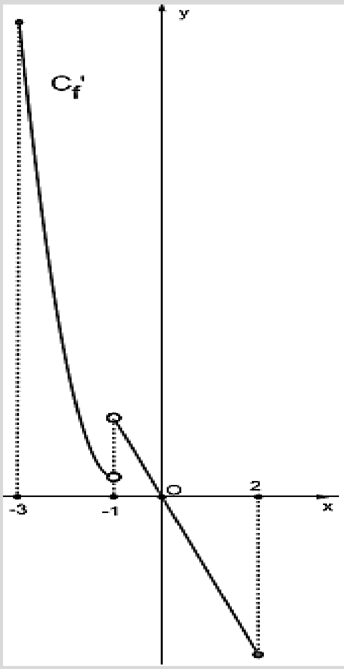
α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

β) Να βρείτε:

i. Τα κρίσιμα σημεία της f, αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους.

γ) Αν η f ΄ είναι συνεχής στο [0,2] και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$.



Λύση

α) Για κάθε $x \in [-3,-1) \cup (-1,0)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο [- 3, 0], οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
Για κάθε $x \in (0,2)$ είναι $f'(x) < 0$ και η f είναι συνεχής στο [0, 2], οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

β) i. Τα κρίσιμα σημεία είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού στα οποία η f δεν είναι παραγωγίσιμη και οι ρίζες της f ΄, άρα κρίσιμα σημεία είναι το x = -1 και το x = 0.

ii. Η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(-3)$, ολικό μέγιστο το $f(0)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2)$.

γ) Στο σχήμα βλέπουμε ότι το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f ΄, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 2, είναι τρίγωνο με εμβαδό $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-f'(2)) = -f'(2)$, άρα

$$E = -\int_0^2 f'(x)dx = -f'(2) \Leftrightarrow -f'(2) = 4 \Leftrightarrow f'(2) = -4 .$$

29645. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -3x^2+1, & x<0 \\ -x^3+3x^2+1, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 0$ και $x_2 > 3$.

β) i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α).

ii. Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία ε και την ευθεία x=0.

Λύση

α) Για x < 0 είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+1=0 \Leftrightarrow -3x^2=-1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \overset{x<0}{\Leftrightarrow} x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$. άρα η f έχει ακριβώς μία ρίζα x_1 στο διάστημα $(-\infty,0)$.

Για x > 0 είναι $f'(x)=-3x^2+3 \ge 0 \Leftrightarrow -3x^2 \ge -3 \Leftrightarrow x^2 \le 1 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x\le 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)=-\infty$.

Στο διάστημα $[0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f([0,1])=[1,3]$ και στο $[1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f((1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right)=(-\infty,3)$. Επειδή το 0 δεν περιέχεται στο $f([0,1])=[1,3]$, η f δεν έχει ρίζα στο [0, 1].

Επειδή το 0 περιέχεται στο $f((1,+\infty))$, υπάρχει μοναδικό $x_2>1$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$.

Είναι $f(3)=-27+27+1=1$, οπότε στο διάστημα $(3,+\infty)$ η f έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,1)$, οπότε η ρίζα x_2 της f περιέχεται στο $(3,+\infty)$, επομένως $x_2>3$.

β) i. Είναι $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=f(0)=1$, οπότε η f είναι συνεχής στο x = 0 και επειδή είναι συνεχής στα $[x_1,0)$, $[0,x_2]$ ως πολυωνυμική, είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$.

Στο $(x_1,0)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-6x$. Στο $(0,x_2)$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-3x^2+6x$. Στο x = 0 είναι

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-3x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-3x^2}{x}=\lim_{x\to0^-}(-3x)=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^3+3x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cancel{x}(-x^2+3x)}{\cancel{x}}=0.$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2). Επειδή $f(x_1)=f(x_2)=0$ η συνάρτηση ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$.

ii. Για $x\in(x_1,0)$ είναι $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow 6\xi=0 \Leftrightarrow \xi=0$ αδύνατο.

Για $x\in(0,x_2)$ είναι $f'(\xi)=0 \Leftrightarrow -3\xi^2+6\xi=0 \Leftrightarrow -3\xi(\xi-2)=0 \Leftrightarrow \xi=0$ απορρίπτεται ή ξ = 2 δεκτή.

Επίσης $f'(0)=0$ οπότε τα ζητούμενα ξ είναι τα 0,2.

Επίσης $f'(0)=0$ οπότε τα ζητούμενα ξ είναι τα 0,2.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο x = 2 έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-5=0 \Leftrightarrow y=5$

Έστω $h(x)=5-f(x)=5+x^3-3x^2-1=x^3-3x^2+4 \Leftrightarrow$

$h(x)=(x-2)(x^2-x-2)=(x-2)^2(x+1)\ge 0$ για κάθε $x\in[0,2]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_0^2 h(x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+4x\right]_0^2=4 \text{ τ.μ.}$$

29646. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=-x^3+3x^2+1,\ x\ge 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η f παρουσιάζει στο $x_1=0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2=2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1,f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

ii. Τα σημεία $A(x_1,f(x_1)),\ B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία.

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Β, η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, της ευθείας ε και του άξονα y΄y.

Λύση

α) i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=-3x^2+6x$.

Είναι $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow -3x^2+6x\ge 0 \Leftrightarrow -3x(x-2)\ge 0 \Leftrightarrow x-2\le 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0<x\le 2$.

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)>0$ και για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$. Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_1=0$ και τοπικό μέγιστο στο $x_2=2$.

Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=-6x+6$.

Είναι $f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow -6x+6\ge 0 \Leftrightarrow x\le 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f''(x)>0$ και για κάθε $x>1$ είναι $f''(x)<0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι κυρτή στο [0, 1] και κοίλη στο $[1,+\infty)$. Η f έχει σημείο καμπής το $\Gamma(1,f(1))$.

ii. Είναι $f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=5$, οπότε Α(0, 1), Β(2, 5) και Γ(1, 3).

Είναι $\lambda_{AB}=\dfrac{5-1}{2-0}=2,\ \lambda_{B\Gamma}=\dfrac{3-5}{1-2}=2$, δηλαδή $\lambda_{AB}=\lambda_{B\Gamma}\Leftrightarrow AB//B\Gamma$, οπότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. Είναι $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{0+2}{2}=1=x_\Gamma$ και $\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1+5}{2}=3=y_\Gamma$, οπότε το Γ είναι μέσο του ΑΒ.

β) Η ευθεία ΑΒ έχει εξίσωση $y-1=2x\Leftrightarrow y=2x+1$.

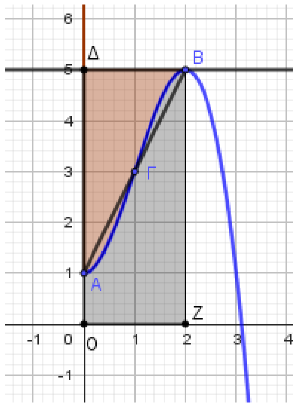
Έστω $g(x)=f(x)-y=-x^3+3x^2+1-2x-1=-x^3+3x^2-2x\Leftrightarrow$

$g(x)=-x(x^2-3x+2)=-x(x-1)(x-2)$

x	0		1		2		+∞
- x		–		–		–	
x- 1		–	0	+		+	
x – 2		–		–	0	+	
g		–	0	+	0	+	

Όταν $x\in[0,1]$ είναι $g(x)\le 0\Leftrightarrow f(x)\le 2x+1$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία ΑΒ είναι

$$E_1=-\int_0^1 g(x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}\ \text{τ.μ.}$$



Όταν $x\in[1,2]$ είναι $g(x)\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge 2x+1$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία ΑΒ είναι

$$E_2=\int_1^2 g(x)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2=\frac{1}{4}\text{ τ.μ.}$$

Επειδή $E_1=E_2$ η ευθεία ΑΒ ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία.

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο Β έχει εξίσωση $y=5$.

Είναι (ΑΒΔ)=$\frac{1}{2}(\text{ΑΔ})(\text{ΒΔ})=4$.

Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της C_f, της ευθείας ε και του άξονα y'y είναι

$$E=\int_0^2 5-f(x)dx=10-\int_0^2\left(-x^3+3x^2+1\right)dx\Leftrightarrow$$

$$E=10-\left[-\frac{x^4}{4}+x^3+x\right]_0^2=10-6=4\text{ τ.μ., άρα E= (ΑΒΔ).}$$

31148.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=e^{-x}$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x,f(x))$ και $\Gamma(x,g(x))$ με $x>0$. Η παράλληλη ευθεία από το Β προς τον άξονα x΄x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα x΄x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Ζ.

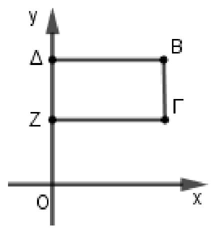
i. Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΖΔ είναι $E(x)=\frac{x^3}{e^x}$, $x>0$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x, το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

γ) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\frac{f(x)-g(x)}{x}$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\ln 2$ και $x=1$, είναι $\ln\sqrt{2e}-\frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\ge g(x)\Leftrightarrow\frac{x^2+1}{e^x}\ge e^{-x}\Leftrightarrow x^2+1\ge e^xe^{-x}\Leftrightarrow x^2+1\ge 1\Leftrightarrow x^2\ge 0$ ισχύει



β) i. $E(x)=(\text{ΒΓ})(\text{ΓΖ})=\left(f(x)-g(x)\right)\cdot x=\left(\frac{x^2+1}{e^x}-e^{-x}\right)x=\frac{x^2}{e^x}\cdot x=\frac{x^3}{e^x}$

ii. Για κάθε $x>0$ είναι $E'(x)=\frac{3x^2e^x-x^3e^x}{\left(e^x\right)^2}=\frac{x^2\cancel{e^x}(3-x)}{\left(e^x\right)^{\cancel{2}}}=\frac{x^2(3-x)}{e^x}$.

$$E'(x)\ge 0\Leftrightarrow\frac{x^2(3-x)}{e^x}\ge 0\Leftrightarrow 3-x\ge 0\Leftrightarrow x\le 3.$$

Για κάθε $x\in(0,3)$ είναι $E'(x)>0$ και για κάθε $x\in(3,+\infty)$ είναι $E'(x)<0$, επειδή η Ε είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$. Η Ε έχει μέγιστο για x = 3.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_{\ln 2}^{1}h(x)dx=\int_{\ln 2}^{1}\frac{f(x)-g(x)}{x}dx=\int_{\ln 2}^{1}\frac{x}{e^x}dx=\int_{\ln 2}^{1}xe^{-x}dx\Leftrightarrow$

$E=\int_{\ln 2}^{1}x\left(-e^{-x}\right)'dx=\left[-xe^{-x}\right]_{\ln 2}^{1}-\int_{\ln 2}^{1}\left(-e^{-x}\right)dx\Leftrightarrow E=-e^{-1}+\frac{\ln 2}{e^{\ln 2}}-\left[e^{-x}\right]_{\ln 2}^{1}=...=\ln\sqrt{2e}-\frac{2}{e}$.

31149. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(1+f(x)\right)-\ln\left(f(x)\right)>f^2(x)\cdot f(\ln 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f,τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $\ln\left(\frac{27}{4e}\right)$.

Λύση

α) Για κάθε x> 0 είναι $1+\frac{1}{x}>1\Leftrightarrow\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>0$ και επειδή $x^2>0$, είναι $f(x)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}>0$. Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ είναι $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x_1}>1+\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow\ln\left(1+\frac{1}{x_1}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{x_2}\right)$ (1)

και $x_1^2<x_2^2\Leftrightarrow\frac{1}{x_1^2}>\frac{1}{x_2^2}$ (2). Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (1), (2) προκύπτει ότι $f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow(0,+\infty)$. (Προτιμήσαμε τον ορισμό μονοτονίας γιατί η παραγώγιση φαίνονταν ποιο δύσκολη).

β) $\ln\left(1+f(x)\right)-\ln\left(f(x)\right)>f^2(x)\cdot f(\ln 2)\Leftrightarrow\ln\left(\frac{1+f(x)}{f(x)}\right)>f^2(x)\cdot f(\ln 2)\Leftrightarrow$

$\ln\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)>f^2(x)\cdot f(\ln 2)\Leftrightarrow\frac{\ln\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)}{f^2(x)}>f(\ln 2)\Leftrightarrow$

$f\left(f(x)\right)>f(\ln 2)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(x)<\ln 2\Leftrightarrow f(x)<f(1)\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}x>1$.

γ) Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_{1/2}^{1}f(x)dx=\int_{1/2}^{1}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}dx$.

Θέτουμε $1+\frac{1}{x}=u$, τότε $-\frac{1}{x^2}dx=du$. Για $x=\frac{1}{2}$ είναι u= 3 και για x = 1 είναι u=2, οπότε

$E=-\int_{1/2}^{1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}dx\right)=-\int_{3}^{2}\ln u\,du=\int_{2}^{3}\ln x\,(x)'\,dx=\left[x\ln x\right]_2^3-\int_2^3 u\cdot\frac{1}{u}du=3\ln 3-2\ln 2-3+2\Leftrightarrow$

$E=\ln 27-\ln 4-1=\ln 27-\ln 4e=\ln\left(\frac{27}{4e}\right)$ τ.μ.

31530. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) **i.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_o που περιέχεται στο διάστημα (0, 1).

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_o είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x_o+\theta)\,x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)\,x-5}$, αν x_o είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ ένας θετικός αριθμός.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την εφαπτομένη της στο σημείο Α(1, 4) και την κατακόρυφη ευθεία $x=2$.

Λύση

α) i. Είναι $f(0)=-2,\ f(1)=4$, άρα $f(0)f(1)<0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2+5$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)>0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

ii. Είναι $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{2}-2=\dfrac{5}{8}>0$, άρα $f\left(\dfrac{1}{2}\right)f(0)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. Όμως το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f, άρα $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, οπότε το x_0 είναι ποιο κοντά στο 0.

β) Είναι $x_0+\theta>x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_0+\theta)>f(x_0)=0$ και $x_0-\theta<x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_0-\theta)<f(x_0)=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x_o+\theta)\,x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)\,x-5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x_o+\theta)\,x^{\cancel{3}\,2}}{f(x_o-\theta)\,\cancel{x}}=-\infty$.

γ) Είναι $f'(1)=3+5=8$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=8x-4$.

$f(x)-y=x^3+5x-2-8x+4=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_1^2\left|x^3-3x+2\right|dx=\int_1^2\left(x^3-3x+2\right)dx=\left[\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2+2x\right]_1^2=\dfrac{5}{4}$ τ.μ.

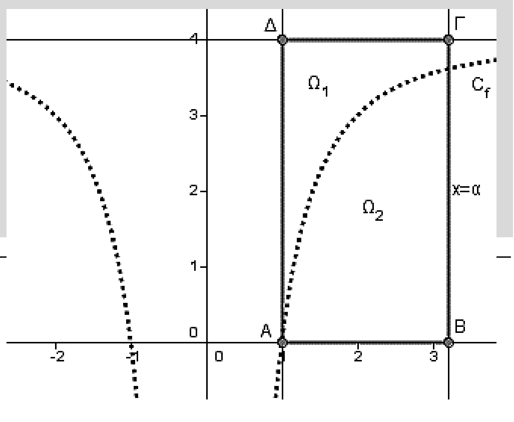
31533. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4-\dfrac{4}{x^2},\ x\neq0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f.

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1,\ f(x_1)),\ B(x_2,\ f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1x_2=-4$.

γ) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα x′x και τις ευθείες $x=1,\ x=\alpha,\ \alpha>1$ και $y=4$.

Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία $\Omega_1,\ \Omega_2$.



i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$.

Λύση

α) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \frac{8}{x^3}$.

Για κάθε x < 0 είναι $f'(x) < 0$ και για κάθε x > 0 είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f''(x) = -\frac{24}{x^4} < 0$, οπότε η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(4 - \frac{4}{x^2}\right) = 4$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(4 - \frac{4}{x^2}\right) = 4$, άρα η ευθεία y =4 είναι ασύμπτωτη της C_f .

β) Επειδή οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, ισχύει ότι

$$f'(x_1)f'(x_2) = -1 \Leftrightarrow \frac{8}{x_1^3}\cdot\frac{8}{x_2^3} = -1 \Leftrightarrow (x_1x_2)^3 = -64 \Leftrightarrow x_1x_2 = -4$$

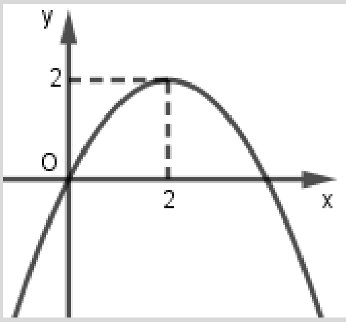
γ) i. Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει εμβαδό $(AB\Gamma\Delta) = (AB)(A\Delta) = 4(\alpha - 1)$.

$$E(\Omega_2) = \int_1^\alpha f(x)dx = \int_1^\alpha \left(4 - \frac{4}{x^2}\right)dx = \left[4x + \frac{4}{x}\right]_1^\alpha = 4\alpha + \frac{4}{\alpha} - 4 - 4 =$$

$$4\alpha + \frac{4}{\alpha} - 8 = \frac{4\alpha^2 - 8\alpha + 4}{\alpha} = \frac{4(\alpha-1)^2}{\alpha}$$

$$E(\Omega_1) = (AB\Gamma\Delta) - E(\Omega_2) = 4(\alpha-1) - \frac{4(\alpha-1)^2}{\alpha} = 4(\alpha-1)\left(1 - \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) = \frac{4(\alpha-1)}{\alpha}.$$

ii. $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) \Leftrightarrow \frac{4\cancel{(\alpha-1)}}{\cancel{\alpha}} = \frac{\cancel{4}(\alpha-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{\alpha}} \Leftrightarrow 1 = \alpha - 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$.



31534. Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο K(2, 2) και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο A(0, 1), να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$.

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$.

Λύση

α) Επειδή η f΄είναι παραβολή έχει εξίσωση της μορφής $f'(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Επειδή η παραβολή έχει μέγιστο είναι α < 0. Επειδή η παραβολή διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι $f'(0)=0 \Leftrightarrow \gamma=0$.
Επειδή η f΄έχει μέγιστο στο x = 2 που βρίσκεται στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, είναι $f''(2)=0$.
Είναι $f''(x)=2\alpha x+\beta$, οπότε $f''(2)=0 \Leftrightarrow 4\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \beta=-4\alpha$ (1).

Επειδή η $C_{f'}$ διέρχεται από το Κ, ισχύει ότι $f'(2)=2 \Leftrightarrow 4\alpha+2\beta=2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 4\alpha-8\alpha=2 \Leftrightarrow -4\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{2}$

και από την (1) είναι β =2, άρα $f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x \Leftrightarrow f'(x)=\left(-\frac{1}{6}x^3+x^2\right)' \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=1 \Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=-\frac{1}{6}x^3+x^2+1$.

γ) i. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε x > 0 είναι $g(x)>f(x) \Leftrightarrow \cancel{x^2}+x+\cancel{1}-\eta\mu x>-\frac{1}{6}x^3+\cancel{x^2}+\cancel{1} \Leftrightarrow$
$\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x>0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x,\ x\geq 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=\frac{1}{2}x^2+1-\sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε x > 0 είναι $\frac{1}{2}x^2>0,\ 1-\sigma\upsilon\nu x\geq 0$, άρα $h'(x)>0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Για κάθε x > 0 είναι $h(x)>h(0) \Leftrightarrow \frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x>0$

ii. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x\right|dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{6}x^3+x-\eta\mu x\right)dx=$
$\left[\frac{x^4}{24}+\frac{x^2}{2}+\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^4}{24}+\frac{\pi^2}{2}-1-1=\frac{\pi^4+12\pi^2-48}{24}$ τ.μ.

31792.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^2+x+1, & -1\leq x<1\\ 1+\frac{(\ln x)^2}{x}, & x\geq 1\end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.
β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.
γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x), g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$.

Λύση

α) Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x^2+x+1)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1+\frac{(\ln x)^2}{x}\right)=1=f(1)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$ η f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x^2+x+1-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}=-1$ και

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1+\frac{(\ln x)^2}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(\ln x)^2}{x^2-x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to1^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{2x-1}=0.$$

Επειδή $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

β) Η f έχει κρίσιμο σημείο το $x_0=1$. Για -1 < x< 1 είναι $f'(x)=-2x+1$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow-2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Η f έχει κρίσιμο σημείο το $x=\frac{1}{2}$.

Για x > 1 είναι $f'(x)=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}=0\Leftrightarrow$

$2-\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$. Η f έχει κρίσιμο σημείο το $x=e^2$.

γ) Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=1+\frac{(\ln x)^2}{x}-e^{-x}$, $x\in[1,e]$.

Για κάθε $1\le x\le e$ είναι $-1\ge-x\ge-e\Leftrightarrow e^{-e}\le e^{-x}\le e^{-1}=\frac{1}{e}<1\Rightarrow1-e^{-x}>0$ και επειδή

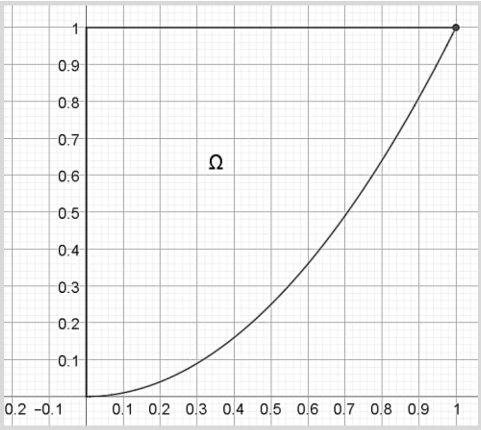
$\frac{(\ln x)^2}{x}\ge0$, είναι $h(x)>0$ για κάθε $x\in[1,e]$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_1^e h(x)dx=\int_1^e\left(1-e^{-x}\right)dx+\int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}dx\Leftrightarrow$

$$E=\left[x+e^{-x}\right]_1^e+\int_1^e(\ln x)^2(\ln x)'dx\Leftrightarrow$$

$$E=e+e^{-e}-1-\frac{1}{e}+\left[\frac{\ln^3 x}{3}\right]_1^e=e+e^{-e}-1-\frac{1}{e}+\frac{1}{3}=e+e^{-e}-\frac{2}{3}-\frac{1}{e}\ \text{τ.μ.}$$

33598. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα yy' την ευθεία $y=1$ και τη γραφική παράσταση της f.



α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

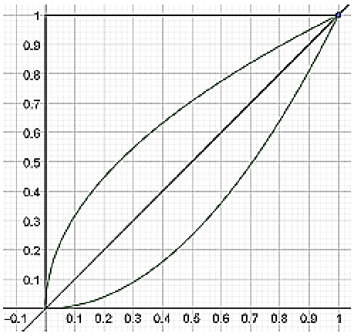
γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx<\frac{1}{2}$.

δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι

i. $\int_0^1 f^{-1}(x)dx=1-\int_0^1 f(x)dx$.

ii. $E(\Omega)=\int_0^1 f^{-1}(x)dx$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω.

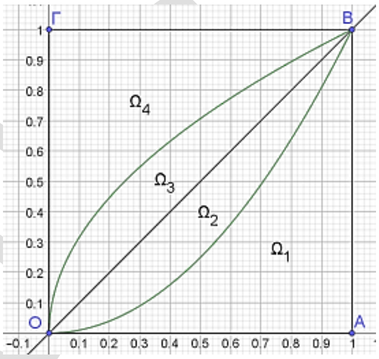
Λύση



α) Στο σχήμα βλέπουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται. $D_{f^{-1}} = f(A) = [0,1]$.

β) Επειδή η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι συμμετρική της f ως προς την ευθεία y = x, σχεδιάζουμε την y = x και στη συνέχεια τη συμμετρική της καμπύλης ως προς την ευθεία αυτή.

γ) Έστω Ω_1 το χωρίο που ορίζεται από τη C_f, τον x΄x και την ευθεία y=1. Στο σχήμα βλέπουμε ότι το χωρίο Ω_1 έχει εμβαδό μικρότερο από το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ, οπότε $E_1 < (OAB) \Leftrightarrow$



$$\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}(OA)(OB) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$$

δ) i. Λόγω της συμμετρίας ως προς την y = x είναι $E(\Omega_1) = E(\Omega_4)$.

$$\int_0^1 f^{-1}(x)dx = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = (OAB\Gamma) - E(\Omega_4) =$$

$$1^2 - E(\Omega_1) = 1 - \int_0^1 f(x)dx$$

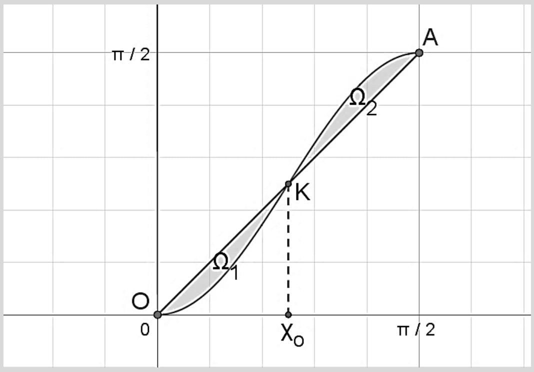
ii. Από το σχήμα έχουμε: $E(\Omega) = E(\Omega_4) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$

33634. Έστω $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx$ και $J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I + J = \frac{\pi^2}{4}$.

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u = \frac{\pi}{2} - x$ να αποδείξετε ότι $I = J$ και κατόπιν ότι $I = J = \frac{\pi^2}{8}$.

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \frac{\pi}{2}\eta\mu^2 x$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η ευθεία ΟΑ τέμνει τη C_f στα σημεία $O(0,0)$, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $K(x_o, f(x_o))$ και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1, Ω_2. Να αποδείξετε ότι :



i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα yy΄ και της ευθείας $y = \frac{\pi}{2}$ είναι το J.

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 είναι ίσα .

Λύση

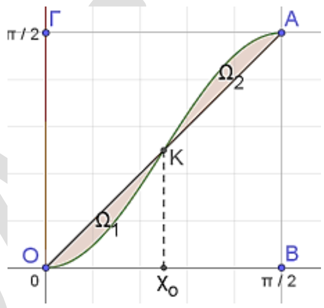
α) $I + J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx + \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx\right) \Leftrightarrow$

$$I + J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x\right)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

β) $u = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - u \Rightarrow dx = -du$. Για x = 0 είναι $u = \frac{\pi}{2}$ και για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι u = 0.

$$J = -\frac{\pi}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2} - u\right)du = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 u du = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x dx = I.$$

Άρα $I + J = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow 2I = \frac{\pi^2}{4} \Leftrightarrow I = \frac{\pi^2}{8} = J$

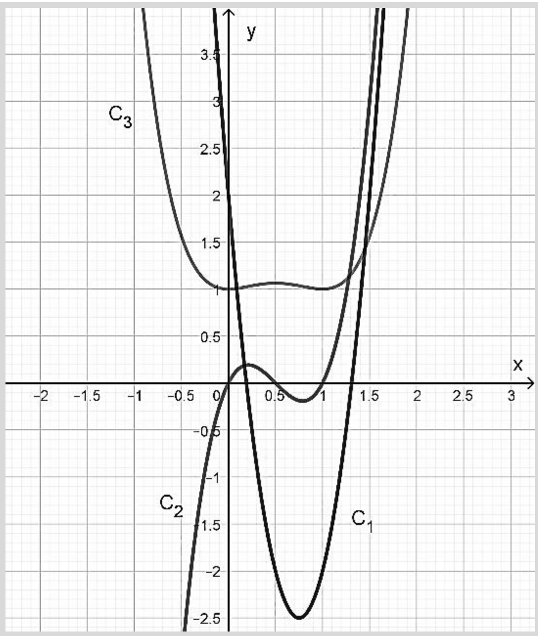


γ) i. Η ευθεία ΟΑ επειδή διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$, $A(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, είναι η y = x.
Το I αντιπροσωπεύει το εμβαδόν του χωρίου που ορίζει η C_f, ο άξονας x΄x και η ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.

Παρατηρούμε ότι το τετράγωνο ΟΒΑΓ έχει εμβαδό $\frac{\pi^2}{4}$, οπότε
$(OBA\Gamma) = I + J \Leftrightarrow J = (OBA\Gamma) - I$.
Στο σχήμα όμως η περιοχή αυτή είναι το χωρίο που σχηματίζεται από τη C_f, του άξονα yy΄ και της ευθείας $y = \frac{\pi}{2}$, άρα το J είναι εμβαδόν αυτής της περιοχής.

ii. Είναι $I = (OAB) + E(\Omega_2) - E(\Omega_1)$ και $J = (OA\Gamma) + E(\Omega_1) - E(\Omega_2)$
Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ίσα, οπότε έχουν και ίσα εμβαδά.Είναι
$I = J \Leftrightarrow \cancel{(OAB)} + E(\Omega_2) - E(\Omega_1) = \cancel{(OA\Gamma)} + E(\Omega_1) - E(\Omega_2) \Leftrightarrow 2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_1) \Leftrightarrow E(\Omega_2) = E(\Omega_1)$

34151. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f΄ και F, όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$.
Δίνεται επίσης ότι η C_3 τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 1 ενώ η C_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα x′x σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $\frac{1}{2}$, 1.
Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2,



α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση F ως προ την μονοτονία και τα ακρότατα.
β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F.
γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f΄ και F.
δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα x′x και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $F'(x)=f(x)$.

Στο σχήμα βλέπουμε ότι Για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$, είναι $f(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ είναι $f(x)>0$, άρα για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι $F'(x)<0$ και για κάθε $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ είναι $F'(x)>0$. Επειδή η F είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$, $\left[\frac{1}{2},1\right]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $[1,+\infty)$. Η F έχει τοπικά ελάχιστα στα $x_1=0,\ x_2=1$ και τοπικό μέγιστο στο $x_3=1$.

β) Αν η C_3 ήταν η γραφική παράσταση της f', τότε θα ήταν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f θα ήταν γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ που είναι άτοπο. Άρα η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=12x^2-12x+2$ και

$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow F'(x)=4x^3-6x^2+2x\Leftrightarrow F'(x)=\left(x^4-2x^3+x^2\right)'\Leftrightarrow$

$F(x)=x^4-2x^3+x^2+c,\ c\in\mathbb{R}$. Στο σχήμα βλέποντας τη C_3, έχουμε ότι $F(0)=1$, άρα c = 1, οπότε

$F(x)=x^4-2x^3+x^2+1,\ x\in\mathbb{R}$.

δ) $E(\Omega)=\int_0^{1/2}f(x)dx-\int_{1/2}^{1}f(x)dx=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)-\left(F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)\right)\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)-F(1)+F\left(\frac{1}{2}\right)=2F\left(\frac{1}{2}\right)-F(0)-F(1)\Leftrightarrow$

$E(\Omega)=2\left(\frac{1}{16}-2\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+1\right)-1-1=2\cdot\frac{17}{16}-2=\frac{17}{8}-\frac{16}{8}=\frac{1}{8}$ τ.μ.

34566.Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\ \beta]\to\mathbb{R}$, με $\alpha>0$ και $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- $\int_\alpha^\beta xf(x)f'(x)dx=-\ln2$.
- $\alpha f^2(\alpha)=\beta f^2(\beta)$.
- $f'(x)\neq0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf^2(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι ln4 τετραγωνικές μονάδες.

γ) Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (\alpha, \beta]$ ισχύει $\dfrac{G(x) - G(\alpha)}{x - \alpha} < f(\alpha)$.

Λύση

α) Η g είναι συνεχής στο [α, β] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = f^2(x) + 2xf(x)f'(x)$. Είναι $g(\alpha) = \alpha f^2(\alpha) = \beta f^2(\beta) = g(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0$. Η εφαπτομένη της C_g στο x = ξ είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

β) Είναι $E = \int_\alpha^\beta f^2(x)dx$.

$$\int_\alpha^\beta xf(x)f'(x)dx = -\ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta x\left[f^2(x)\right]' dx = -\ln 2 \Leftrightarrow \left[xf^2(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f^2(x)dx = -2\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\beta f^2(\beta)} - \cancel{\alpha f^2(\alpha)} - E = -\ln 4 \Leftrightarrow E = \ln 4 \text{ τ.μ.}$$

γ) Επειδή η f ΄είναι συνεχής στο [α, β] και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, η f ΄διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.

Έστω ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε η f θα ήταν γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Τότε:

$$\alpha < \beta \ (1) \overset{f \nearrow [\alpha,\beta]}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f(\beta) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f^2(\alpha) < f^2(\beta) \ (2)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (1), (2) κατά μέλη προκύπτει ότι $\alpha f^2(\alpha) < \beta f^2(\beta)$ που είναι άτοπο, άρα $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Για την G εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο [α, x], $x \in (\alpha, \beta]$, οπότε υπάρχει $x_1 \in (\alpha, x)$ τέτοιο, ώστε

$$G'(x_1) = \frac{G(x) - G(\alpha)}{x - \alpha} \Leftrightarrow f(x_1) = \frac{G(x) - G(\alpha)}{x - \alpha}.$$

Είναι $\alpha < x_1 < \beta \overset{f \searrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{G(x) - G(\alpha)}{x - \alpha} < f(\alpha)$.

35244. Δίνεται η συνάρτηση με $f(x) = \text{εφ}x - 1,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\text{ημ}x = (1 + x)\text{συν}x$ έχει μια ακριβώς λύση στο ανοικτό διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τις ευθείες $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ και τον άξονα $x'x$.

Λύση

α) Έστω $g(x) = \text{ημ}x - (1 + x)\text{συν}x,\ x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{4}-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-1-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi\sqrt{2}}{8}<0$,

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=1>0$.

Είναι $g\left(\frac{\pi}{2}\right)g\left(\frac{\pi}{4}\right)<0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ με $g'(x)=\cancel{\sigma\upsilon\nu x}-\cancel{\sigma\upsilon\nu x}+(1+x)\eta\mu x>0\Rightarrow g\nearrow$ στο $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της g στο διάστημα αυτό.

β) Για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x)>0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x-1>0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x>\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ και

$f(x)<0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x-1<0\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x<\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 0\le x<\frac{\pi}{4}$.

γ) Είναι $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ και $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$, οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι: $E=-\int_0^{\pi/4}f(x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/3}f(x)dx=-\int_0^{\pi/4}(\varepsilon\varphi x-1)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/3}(\varepsilon\varphi x-1)dx\Leftrightarrow$

$$E=-\int_0^{\pi/4}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx+\frac{\pi}{4}-0+\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}dx-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$$

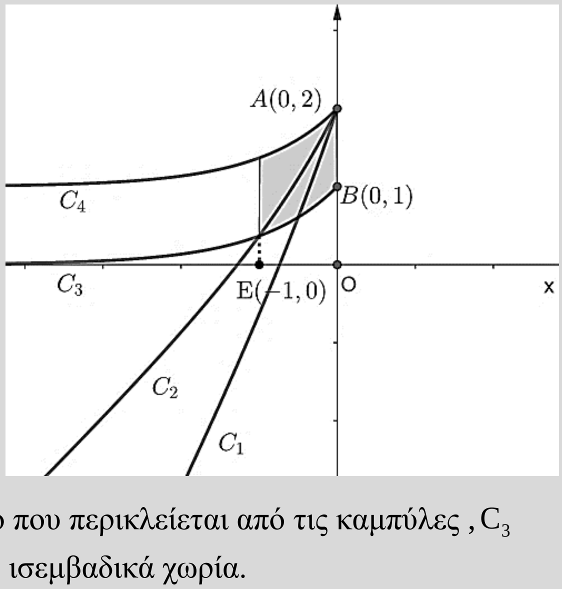
$$E=\int_0^{\pi/4}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx+\frac{\pi}{4}-\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow E=\left[\ln(\sigma\upsilon\nu x)\right]_0^{\pi/4}-\left[\ln(\sigma\upsilon\nu x)\right]_{\pi/4}^{\pi/3}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$E=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{6}=\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\ln 2+\frac{\pi}{6}=\ln\frac{1}{2}+\ln 2+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

35302. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g και h με $f(x)=e^x$, $g(x)=e^x+1$ και $h(x)=e^x+x+1$, $x\in(-\infty,0]$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι C_1, C_2, C_3 και C_4. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g, και h τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των C_1, C_2, C_3 και C_4 την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας.



γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες ,C_3 C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

Λύση

α) Για κάθε $x<0$ είναι $h'(x)=e^x+1>0$ και επειδή η h είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Είναι $h''(x)=e^x>0 \Rightarrow h \cup \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+x+1\right)=-\infty$ και $h(0)=2$, οπότε η h επειδή είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα έχει σύνολο τιμών το $(-\infty,2]$.

β) Επειδή $f(0)=1$ και η C_3 είναι η μόνη που διέρχεται από το σημείο Β(0,1), είναι η γραφική παράσταση της f.Επειδή η C_4 βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x, δεν είναι η γραφική παράσταση της h. Είναι $g(x)=e^x+1>0$ για κάθε x < 0, οπότε η C_4 είναι η γραφική παράσταση της g.Είναι $h(-1)=e^{-1}-1+1=\frac{1}{e}>0$, οπότε στο διάστημα $(-\infty,-1)$ η h έχει σύνολο τιμών το $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$.Το 0 περιέχεται στο $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$, οπότε υπάρχει μοναδικό (λόγω μονοτονίας) $\rho\in(-\infty,-1)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho)=0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της h τέμνει τον άξονα x΄x σε σημείο πριν το E, άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της h.

γ) Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 ,C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 έχει εμβαδό $E_1=\int_{-1}^{0}\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(e^x+1-e^x\right)dx=1$.

Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3, C_2 και τον άξονα y΄y, έχει εμβαδό

$$E_2=\int_{-1}^{0}\left(h(x)-f(x)\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(e^x+x+1-e^x\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}.$$

Επειδή $E_2=\frac{E_1}{2}$ η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 ,C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 σε δύο ισεμβαδικά χωρία.